12 Übungen zu Mathematik für Physiker zum Dienstag, den 2.2.2010

12.1

a) Da $arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, gilt dass $\lim\limits_{x\to\infty} arctan(\lambda x) = \frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} arctan(\lambda x) = -\frac{\pi}{2}$

Somit ist $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2}+arctan(\lambda x)}{\pi} = \frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} = 1$

und $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{\pi}{2}+arctan(\lambda x)}{\pi} = \frac{-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0.$

Somit kommt diese Funktion als Darstellung der Schwellenfunktion infrage.

Da $tanh(x) = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$, ist $\frac{1+tanh(\lambda x)}{2} = \frac{2-\frac{2}{e^{2\lambda x}+1}}{2}$

Weiter ist $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-\frac{2}{e^{2\lambda x}+1}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

und $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{2}{e^{2\lambda x}+1}}{2} = \frac{2-2}{2} = 0$

Somit kommen also beide Funktionen als Darstellung der Schwellenfunktion in Betracht.

b) Um zu ermitteln, welche Funktion den Grenzwerten am ehesten möglichst nahe kommt, bestimmen wir die Steigung der Funktionen im Sprungpunkt der Schwellenfunktion x=0. Die Funktion mit der größten Steigung an dieser Stelle nähert sich den Grenzwerten 0 und 1 somit schneller an, als die andere, da beide Funktionen hier auch ihren Schnittpunkt (0—0,5) haben.

$(\frac{\frac{\pi}{2}+arctan(\lambda x)}{\pi})'(x) = \frac{\frac{\lambda}{1+x^2\lambda^2}}{\pi} = \frac{\lambda}{\pi+\lambda^2 x^2 \pi}$

$\Rightarrow (\frac{\frac{\pi}{2}+arctan(\lambda x)}{\pi})'(0) = \frac{\lambda}{\pi}$

$(\frac{1+tanh(\lambda x)}{2})'(x) = 2\lambda e^{2\lambda x} \cdot \frac{1}{(e^{2\lambda x}+1)^2}$

$\Rightarrow (\frac{1+tanh(\lambda x)}{2})'(0) = \frac{2\lambda}{1} = 2\lambda$

Somit ist die 2. Funktion besser geeignet.

12.2

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{log(x)}{x^\alpha} \underset{u(x)=log(x)}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{u(x)}{e^{\alpha u(x)}}$

Nach Satz „Die e-Funktion schlägt alles tot“ und $u(x) = log(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ gilt, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{log(x)}{x^\alpha} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha log(x) \underset{u(x)=log(x)}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{e^x})^\alpha \cdot u(x) = \frac{x}{e^{\alpha x}}$

Es ergibt sich ein ähnlicher Fall wie in a), sodass mit Satz „Die e-Funktion schlägt alles tot“ und $u(x) = log(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ folgt, dass $\lim\limits_{x\to 0} log(x)x^\alpha = \lim\limits_{cx} \frac{x}{e^{\alpha x}} = 0$

12.3

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cdot I_k + 0\cdot 0 & A\cdot 0 + 0\cdot B \\ 0\cdot I_k + I_{n-k}\cdot 0 & 0\cdot 0 + I_{n-k}\cdot B \end{pmatrix}$$

Nun gilt: $A \cdot I_k = \sum\limits_{i,j=0}^{k} a_{ij} \cdot 1 = \sum\limits_{i,j=0}^{k} a_{ij} = A.$

Analog: $B \cdot I_{n-k} = \sum\limits_{i,j=0}^{n-k} b_{ij} \cdot 1 = \sum\limits_{i,j=0}^{n-k} b_{ij} = B.$

Weiterhin: $0 \cdot I_k = I_k \cdot 0 = 0 \cdot I_{n-k} = I_{n-k} \cdot 0 = 0 \cdot 0$

Somit ist $\begin{pmatrix} A \cdot I_k + 0 \cdot 0 & A \cdot 0 + 0 \cdot B \\ 0 \cdot I_k + I_{n-k} \cdot 0 & 0 \cdot 0 + I_{n-k} \cdot B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

Für $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{vmatrix}$ gilt die Dreiecksform-Matrizen-Determinantenregel: $det(A) = \sum_i^k a_j j$.

Somit ist $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{vmatrix} = A * 1^{n-k} = A$

Analog gilt für $\begin{vmatrix} I_k & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = 1^k * B = B$

Weiterhin gilt $det(A) \cdot det(B) = det(A \cdot B)$, also $det(A) \cdot det(B) = det(M)$.

Für $\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ würde man A und B entsprechend neu als $A = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} I_k & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ definieren, sodass $A \cdot B = \begin{pmatrix} A \cdot I_k + * \cdot 0 & A \cdot * + * \cdot B \\ \cdot I_k + I_{n-k} \cdot 0 & * \cdot * + I_{n-k} \cdot B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Da die Determinantenregel oben für alle Determinanten der Dreiecksform gelten bleibt die Determinante von A und B gleich.

Somit gilt weiterhin $det(A) \cdot det(B) = det(A \cdot B) = det(M)$

12.5

$tan(\beta(x)) = \frac{H}{x}, \quad tan(\gamma(x)) = \frac{H-h}{x}$

$\alpha(x) = \beta(x) - \gamma(x) = arctan(fracHx) - arctan(\frac{H-h}{x})$

$\alpha'(x) = \frac{H}{1+\frac{H^2}{x^2}} - \frac{H-h}{1+\frac{(H-h)^2}{x^2}} = \frac{Hx^2(x^2+(H+h)^2)-x^2(H-h)(x^2+H^2)}{(x^2+H^2)(x^2+(H-h)^2)} = \frac{-H^2hx^2+Hx^2h^2+hx^4}{(x^2+H^2)(x^2+(H-h)^2)}$

$\Rightarrow 0 = -H^2h + Hh^2 + hx^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{H^2h-Hh^2}{h}} = \sqrt{H^2 - Hh} = \sqrt{H(H-h)}$