12 Korrektur zu Mathematik für Physiker zum Dienstag, den 2.2.2010

12.1

$$f(\lambda,x) = \frac{\frac{\pi}{2}+\overbrace{arctan(\lambda x)}^{\substack{\xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{\pi}{2} \\ \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\frac{\pi}{2}}}}{\pi} = \begin{cases} \to 1 & (x\to\infty) \\ \to 0 & (x\to-\infty) \end{cases}$$

$g(\lambda,x) = \frac{1+tanh(\lambda x)}{2}$

$tanh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$

$\Rightarrow \frac{1+tanh(\lambda x}{2} = \frac{1+\frac{e^{2\lambda x}-1}{e^{2\lambda x}+1}}{2} = \begin{cases} 1 & (\lambda\to\infty)(x>0) \\ 0 & (\lambda\to\infty)(x<0) \end{cases}$

b)

für $x>0: |f(\lambda,x)-1| = |\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctan(\lambda x)| = |\frac{1}{\pi}(arctan(\lambda x)-\frac{\pi}{2})| = \frac{1}{pi}|\frac{\pi}{2}-arctan(\lambda x)| \geq \frac{1}{\pi}\int\limits_{x\lambda}^{\infty}\frac{1}{2t^2}dt = -\frac{1}{2t\pi}|_{x\lambda}^{\infty} = \frac{1}{2x\lambda}$

$|g(\lambda,x)-1| = |\frac{1}{2}-\frac{1}{2}tanh(\lambda x)| = \frac{1}{2}|1-tanh(x\lambda)| = \frac{1}{2}|1-\frac{e^{x\lambda}-e^{-x\lambda}}{e^{x\lambda}+e^{-x\lambda}}| = \frac{e^{-x\lambda}}{e^{x\lambda}+e^{-x\lambda}} \leq e^{-2x\lambda}$

12.2

oder:

$e^x \geq 1+x \Rightarrow log(x+1) \leq x$

$log(x) = \frac{1}{\alpha}log(x^{\alpha/2}) \leq \frac{2}{\alpha}log(1+x^{\alpha/2}) \leq \frac{2}{\alpha}x^{\alpha/2}$

$\frac{\frac{2}{\alpha}log(x^{\alpha/2})}{x^\alpha} = \frac{\frac{2}{\alpha}x^{\alpha/2}}{x^\alpha} = \frac{2}{\alpha}x^{-\alpha/2} \to 0$

b)

$x^\alpha log(x) mit x = \frac{1}{t} \Rightarrow t^{-\alpha}log(\frac{1}{t}) = -t^{-\alpha}log(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

12.3

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \\ & I_{n-k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_k & \\ & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cdot 1 & 1\cdot 0 \\ 0\cdot B & 1\cdot B \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = det(A)\cdot det(B)$ (Multinilearität der Determinante und Entwicklungsatz)

$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$ durch Addition von Vielfachen der obersten k Zeilen kann C eliminiert werden ohne, dass die Determinante geändert wird. B bleibt dabei bestehen, da in den Spalten oberhalb von B nur Nulleinträge stehen.

Alternativ:

Ist Rang A=k $\Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = k \Rightarrow$ die Zeilen von C lassen sich als Linearkombination der Zeilen von A darstellen.

12.4

$$p(\underbrace{p(v)}_{\in Bildp}) = p(v) \Rightarrow 0 = p(p(v)) - p(v) = p(\underbrace{\overbrace{p(v)}^{\in Bild} - v}_{\in Kern})$$

$\Rightarrow \forall v \in V : w = p(v) \in Bildp \quad \wedge \quad u = w - v \in Kernp, v = u + w$

$\Rightarrow v \in ernp \oplus Bildp$

$vbed \Rightarrow V = Kernp \oplus Bildp$

Sei $v \in Kernp \cap Bildp. \Rightarrow \exists w \in V | p(w) = v$

$\Rightarrow 0 = v = p(w) = p(p(w)) = p(v) = 0 (v \in Kernp)$

b) $p|_{Bildp} = Id|_{Bildp}; U = span\{\begin{pmatrix} . \\ . \\ . \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

p Projektion, Bild $p = U, Kernp = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

$p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (v_3) = 0$, also $p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

In der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist die Darstellungsmatrix von $p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \Rightarrow p(x) = \lambda_1 \underbrace{p(v_1)}_{v_1} + \lambda_2 \underbrace{p(v_2)}_{v_2} + \lambda_3 \underbrace{p(v_3)}_{v_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} v_1 & v_2 & v_3 & & & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 & -0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1,5 & 0,5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda 2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

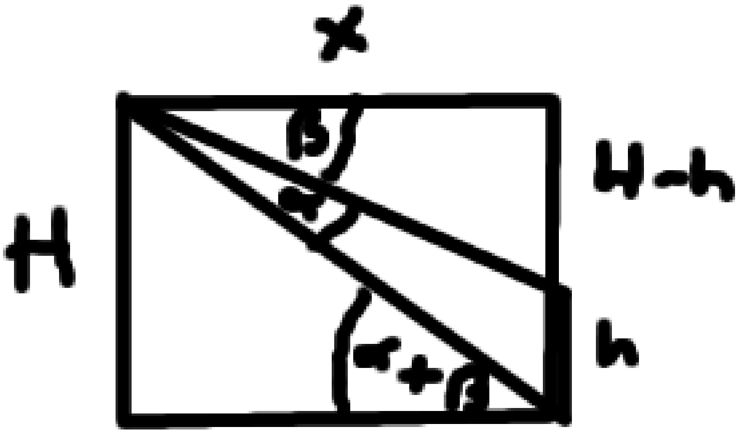
$$p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = p(0,5v_1 + 0,5v_2 - 1,5v_3) = 0,5v_1 + 0,5v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

$$p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = p(0,5v_1 - 0,5v_2 + 0,5v_3) = 0,5v_1 - 0,5v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1,5 & -0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

$p(x)x = A_r \cdot x$

12.5



$tan(\alpha+\beta) = \frac{H}{x}, tan(\beta) = \frac{H-h}{x}$

$\Rightarrow \alpha = \alpha+\beta-\beta = arctan(\frac{H}{x}) - arctan(\frac{H-h}{x})$

$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{1}{x}\{\frac{H}{1+(\frac{H}{x})^2} - \frac{H-h}{1+(\frac{H-h}{x})^2}\} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{H}{1+(\frac{H}{x})^2} = \frac{H-h}{1+(\frac{H-h}{x})^2} \Leftrightarrow \frac{1+(\frac{H}{x})^2}{H} = \frac{1+(\frac{H-h}{x})^2}{H-h}$

$\Rightarrow \frac{x^2H^2}{H} = \frac{x^2+(H-h)^2}{H-h} \Rightarrow \frac{x^2}{H} - \frac{x^2}{H-h} = -H + (H-h)$

$\Rightarrow x^2 = \frac{-h}{\frac{1}{H}-\frac{1}{H-h}} = \frac{-h}{\frac{H-h-H}{H(H-h)}} = H(H-h) \Rightarrow x = \sqrt{H(H-h)}$