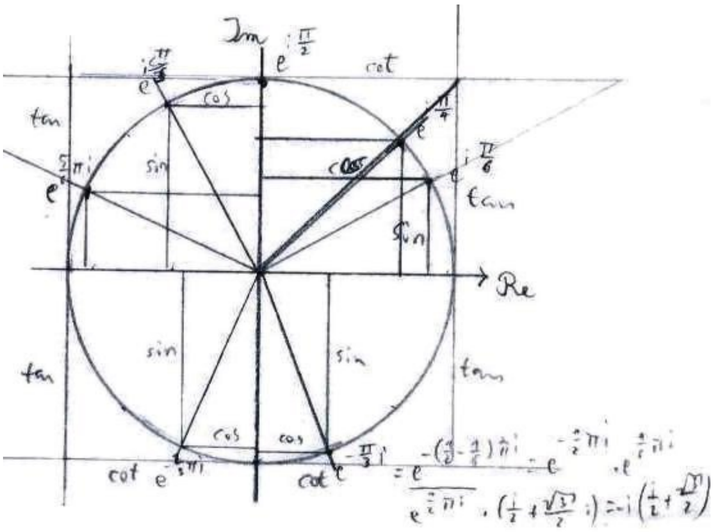
13 Korrektur zu Mathematik für Physiker zum Dienstag, den 9.2.2010

13.1

Zeichnung:



(Nur als Beispiel zur Durchführung!)

13.2

leicht

13.3

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$p_A(\lambda) = det(A - \lambda \cdot I)$

$$= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$= (-3-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) + 8 + 8(-3-\lambda) - 2(1-\lambda)$

$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 9)(1-\lambda) + 8 - 24 - 8\lambda - 2 + 2\lambda$

$= \lambda^2 - 9 - \lambda^3 + 9\lambda - 6\lambda - 18 = -\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 27$

$= (\lambda + 3)(-\lambda^2 + 4\lambda - 9) = -(\lambda + 3)(\lambda^2 - 4\lambda + 9)$

weitere Nullstellen: $\lambda = 2 \pm \sqrt{4-9} = 2 \pm \sqrt{5}i$

$\Rightarrow$ reeller Eigenwert: -3, komplexer Eigenwert: $2 + \sqrt{5}i, \overline{\lambda}$

Im Rellen nicht diagonalisierbar, da komplexe Eigenwerte, im Komplexen schon, da Nullstellen je einfach.

$$(A + 3I)v = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_2 = -v_3, v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - (2 \pm \sqrt{5}i)I)v = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5 \mp \sqrt{5}i & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 \mp \sqrt{5}i & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \mp \sqrt{5}i & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \text{EV zu } 2+\sqrt{5}i : \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}i}{4} \end{pmatrix}, \text{EV zu } 2-\sqrt{5}i : \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}i}{4} \end{pmatrix}$$

13.4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 6 & -3 & -12 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -4 \\ 6 & -3-\lambda & -12 \\ -2 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

$= (1-\lambda)(-3-\lambda)(7-\lambda) - 48 - 48 - (1-\lambda)(-24) - (-3-\lambda)8 - (7-\lambda)(-12)$

$\mu = \lambda - 3$:

$...= (-2-\mu)(-6-\mu)(4-\mu) - 96 - (-2-\mu)(-24) - (-6-\mu)8 - (4-\mu)(-12)$

$= -\mu^3 + \mu^2(-2-6+4) + \mu(24+8-12-24+48+12)$

$= -\mu^3 - 4\mu^2 + 56\mu = -\mu(\mu^2 + 4\mu + 56)$

$...\Rightarrow \lambda_2 = 1+2i, \lambda_3 = \overline{\lambda_2}$

$$\text{EV zu } \lambda_1 : \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -4 & 0 \\ 6 & -6 & -12 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{EV zu } \lambda_2 : \left(\begin{array}{ccc|c} -2i & -2 & -4 & 0 \\ 6 & -4-2i & -12 & 0 \\ -2 & 2 & 6-2i & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -i & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -2-i & -6 & 0 \\ -1 & 1 & 3-i & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3-i & 0 \\ 0 & -1-i & -3-3i & 0 \\ 0 & 1-i & 3-3i & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} (-3-3i)+(3-i)(1+i) \\ -3-3i \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-3i+3+3i-i+1 \\ -3-3i \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i \\ -3-3i \\ 1+i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -3+3i \\ 1-i \end{pmatrix}$$

Dies ist die Eigenbasis von $A_{\mathbb{C}}$. Also ist die Eigenbasis von $A_{\mathbb{R}}$ $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\9\\3\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Kontrolle: }\begin{vmatrix}3&1&1\\3&-3&3\\-1&1&-1\end{vmatrix}=0$$

$$\text{In der Basis B ist } A_B^B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&2\\0&-2&1\end{pmatrix}$$

13.5

$$m\ddot{x}=-\mu\dot{x}-Kx;\quad m,\mu,K>0$$
$$v=\dot{x}\Rightarrow\ddot{x}=\dot{v}$$
$$m\dot{v}=-\mu v-Kx=-\nu v-w^2x$$
$$\dot{x}=v$$
$$\tfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\p\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\-w^2&-\nu\end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix}x\\p\end{pmatrix}$$
$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-w^2&-\lambda-\nu\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+\nu)^2+w^2=\lambda^2+\nu\lambda+w^2=0$$
$$\Rightarrow\lambda_\pm=-\tfrac{\nu}{2}\pm\sqrt{\tfrac{\nu^2}{4}-w^2}$$
$$\text{Aussage } x(t)=x_0e^{x\pm t}=x_0e^{(-\frac{\nu}{2}\pm\sqrt{\frac{\nu^2}{4}-w^2})t}$$
$$0\stackrel{!}{=}\ddot{x}+\nu\dot{x}+w^2x=x_0\lambda^2e^{\lambda t}+\nu\lambda x_0e^{\lambda t}+w^2x_0e^{\lambda t}=\underbrace{(\lambda^2+\nu\lambda+w^2)}_{=0}x=0$$

$$\text{Für } w^2>\tfrac{\nu^2}{4} \text{ ist } \lambda\notin\mathbb{R}$$
$$x_\pm=x_0e^{-\frac{\nu}{2}t}e^{\pm i\sqrt{w^2-\frac{\nu^2}{4}}}$$
$$\Rightarrow\tfrac{x_++x_-}{2}=x_0e^{-\frac{\nu}{2}t}cos(\sqrt{w^2-\tfrac{\nu^2}{4}}t)$$