

1 Übungen zu Mathematik für Physiker zum Dienstag, dem 20.10.2009

1.1 Zeigen Sie für beliebige Mengen A,B,C:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C):$$

sei $x \in A \setminus (B \cup C)$ beliebig, dann:

$$= x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C)$$

$$= x \in A \wedge (\neg x \in B \wedge \neg x \in C)$$

$$= x \in A \wedge x \in A \wedge \neg x \in B \wedge \neg x \in C$$

$$= x \in A \wedge \neg x \in B \wedge x \in A \wedge \neg x \in C$$

$$= x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$\Rightarrow A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

sei $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ beliebig, dann:

$$= x \in A \wedge \neg x \in B \wedge x \in A \wedge \neg x \in C$$

$$= x \in A \wedge x \in A \wedge \neg x \in B \wedge \neg x \in C$$

$$= x \in A \wedge (\neg x \in B \wedge \neg x \in C)$$

$$= x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C)$$

$$= x \in A \setminus (B \cup C)$$

$$\Rightarrow A \setminus (B \cup C) \supseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$\implies A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

sei $x \in A \setminus (B \setminus C)$ beliebig, dann:

$$= x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge \neg x \in C)$$

$$= x \in A \wedge (\neg x \in B \vee x \in C)$$

$$= (x \in A \wedge \neg x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$$

$$= x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

$$\Rightarrow A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

sei $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ beliebig, dann:

$$= (x \in A \wedge \neg x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$$

$$= x \in A \wedge (\neg x \in B \vee x \in C)$$

$$= x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge \neg x \in C)$$

$$= x \in A \setminus (B \setminus C)$$

$$\Rightarrow A \setminus (B \setminus C) \supseteq (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

$$\implies A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$$

sei $x \in A \setminus (A \setminus B)$ beliebig, dann:

$$= x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge \neg x \in B)$$

$$= x \in A \wedge (\neg x \in A \vee x \in B)$$

$$= (x \in A \wedge \neg x \in A) \vee (x \in A \wedge x \in B)$$

$$= (x \in A \wedge x \in B)$$

$$= x \in (A \cap B)$$

$$\Rightarrow A \setminus (A \setminus B) \subseteq (A \cap B)$$

$$\begin{aligned}
&\text{sei } x \in (A \cap B) \text{ beliebig, dann:} \\
&= (x \in A \wedge x \in B) \\
&= (x \in A \wedge \neg x \in A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \\
&= x \in A \wedge (\neg x \in A \vee x \in B) \\
&= x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge \neg x \in B) \\
&= x \in A \setminus (A \setminus B) \\
&\Rightarrow A \setminus (A \setminus B) \supseteq (A \cap B) \\
&\implies A \setminus (A \setminus B) = (A \cap B)
\end{aligned}$$

1.2 Übersetze in Mengeninklusion

1. i) $x \in Z \Rightarrow x \in M^C$
2. ii) $x \in G \Rightarrow x \in T$
3. iii) $x \in G^C \Rightarrow x \in H$
4. iv) $x \in R^C \Rightarrow x \in Z$
5. v) $x \in H \Rightarrow x \in R^C$

Zu Zeigen: $x \in M \Rightarrow x \in T$

1. $x \in R^C \Rightarrow x \in Z \Rightarrow x \in M^C$
 2. $x \in H \Rightarrow x \in R^C \Rightarrow x \in Z \Rightarrow x \in M^C$
 3. $x \in G^C \Rightarrow x \in H \Rightarrow x \in R^C \Rightarrow x \in Z \Rightarrow x \in M^C$
 4. $x \in G^C \Rightarrow x \in M^C = x \in M \Rightarrow x \in G$
 5. $x \in M \Rightarrow x \in G \Rightarrow x \in T$
- $\implies x \in M \Rightarrow x \in T$

1.3 Zeichne eine NAND-Schaltung

Regeln:

1. aus Übersichtsgründen: „NAND“=„N“
2. $a \vee b = (aN a)N(bNb)$
3. $a \wedge b = (aN b)N(aNb)$
4. $\neg a = aN a$

Umformulierung: $[(a \vee b) \vee (c \vee \neg d)] \wedge (c \wedge \neg a)$

$$\begin{aligned}
&= \\
&((((aN a)N(bNb))N((aN a)N(bNb))) \\
&N(((cN c)N((dNd)N(dNd)))N((cN c)N((dNd)N(dNd)))) \\
&N(cN(aN a))N(cN(aN a))) \\
&N((((aN a)N(bNb))N((aN a)N(bNb))) \\
&N(((cN c)N((dNd)N(dNd)))N((cN c)N((dNd)N(dNd)))) \\
&N(cN(aN a))N(cN(aN a)))
\end{aligned}$$

Abstraktion in Ebenen zur Grafischen Darstellung:

Grundbausteine (1. Ebene): $aN a \rightarrow A; bN b \rightarrow B; cN c \rightarrow C; dN d \rightarrow D$

$$\begin{aligned}
&((((A)N(B))N((A)N(B)))N(((C)N((D)N(D))) \\
&N((C)N((D)N(D)))) \\
&N(cN(A))N(cN(A))) \\
&N((((A)N(B))N((A)N(B)))N(((C)N((D)N(D))) \\
&N((C)N((D)N(D)))) \\
&N(cN(A))N(cN(A)))
\end{aligned}$$

2. Ebene: $ANB \rightarrow F; DND \rightarrow G; cNA \rightarrow H$

$((FNF)N(((C)NG)N((C)NG)))$

$N(HNH)$

$N(((FNF)N(((C)NG)N((C)NG)))$

$N(HNH)$

3. Ebene: $FNF \rightarrow I; CNG \rightarrow J; HNH \rightarrow K$

$((I)N((J)N(J)))NK)N(((I)N((J)N(J)))NK)$

4. Ebene: $JNJ \rightarrow L$

$((I)N(L))NK)N(((I)N(L))NK)$

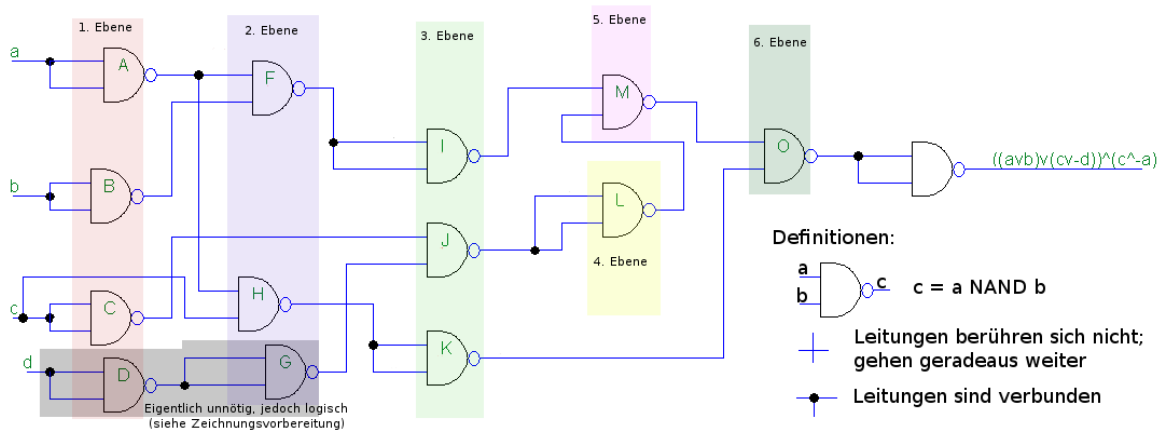
5. Ebene: $INL \rightarrow M$

$((M)NK)N((M)NK)$

6. Ebene: $MNK \rightarrow O$

$(O)N(O)$

Ergebnis: $\implies ONO$



Alternative: Vereinfachung

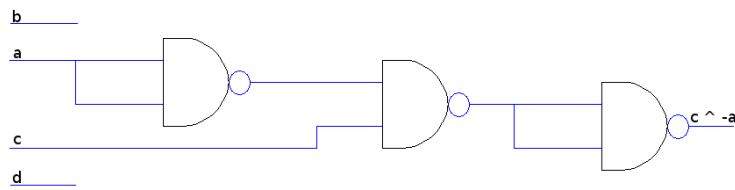
Da der Term $a \vee b \vee c \vee \neg d$ dann wahr ist, wenn c wahr ist, c aber für den nachfolgenden Teil $\wedge(c \wedge \neg a)$ Immer wahr sein muss, damit dieser Teil wahr ist, und selbiges lediglich auch auf $\neg a$ zutrifft, lässt sich die Gleichung auf $c \wedge \neg a$, also auf den rechten Teil reduzieren. Zum weiteren Beleg eine Wahrheitstabelle:

| a | b | c | d | $((a \text{ oder } b) \text{ oder } (c \text{ oder nicht } d)) \text{ und } (c \text{ und nicht } a)$ | $c \text{ und nicht } a$ |
|---|---|---|---|---|--------------------------|
| 1 | 1 | 1 | 1 | FALSCH | FALSCH |
| 1 | 1 | 1 | 0 | FALSCH | FALSCH |
| 1 | 1 | 0 | 1 | FALSCH | FALSCH |
| 1 | 1 | 0 | 0 | FALSCH | FALSCH |
| 1 | 0 | 1 | 1 | FALSCH | FALSCH |
| 1 | 0 | 1 | 0 | FALSCH | FALSCH |
| 1 | 0 | 0 | 1 | FALSCH | FALSCH |
| 1 | 0 | 0 | 0 | FALSCH | FALSCH |
| 0 | 1 | 1 | 1 | WAHR | WAHR |
| 0 | 1 | 1 | 0 | WAHR | WAHR |
| 0 | 1 | 0 | 1 | FALSCH | FALSCH |
| 0 | 1 | 0 | 0 | FALSCH | FALSCH |
| 0 | 0 | 1 | 1 | WAHR | WAHR |
| 0 | 0 | 1 | 0 | WAHR | WAHR |
| 0 | 0 | 0 | 1 | FALSCH | FALSCH |
| 0 | 0 | 0 | 0 | FALSCH | FALSCH |

Dies hätte den Vorteil, dass sich dadurch die NAND-Schaltung erheblich vereinfachen würde:

$$(cn(ana))n(cn(ana))$$

was folgende Schaltung ergeben würde:



1.4 XOR-Verknüpfung

| a | b | $(\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$ |
|---|---|--|
| w | w | f |
| w | f | w |
| f | w | w |
| f | f | f |

b) Da das Byte b XOR c durch die bitweise Anwendung der Xor-Verknüpfung definiert ist, lässt sich das Problem des Zeigens auf einfache Bit-Aussagen zurückführen.

Folglich gilt:

Die Abbildung $f_b = c \rightarrow bXORc, b \in B$ ist invers, sofern gilt:

$$c = f_b \rightarrow bXORf_b, b \in B$$

Aufgrund der Zurückführung auf Bits lässt sich eine Wahrheitstabelle erstellen:

| b | c | $f_b : c \rightarrow bXORc$ | $c : f_b \rightarrow bXORf_b$ |
|---|---|-----------------------------|-------------------------------|
| w | w | f | w |
| w | f | w | f |
| f | w | w | w |
| f | f | f | f |

Da hiermit gezeigt wurde, dass $c = f_b \rightarrow bXORf_b$, gilt, dass für beliebiges b und beliebiges c einer beliebig langen Kombination (bei bitweiser Anwendung der XOR-Verknüpfung) die Abbildung zu sich selbst invers ist.