1 Übungen zu Mathematik für Physiker zum Dienstag, dem 20.10.2009

1.1 Zeigen Sie für beliebige Mengen A,B,C:

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$:

sei $x \in A \setminus (B \cup C)$ beliebig, dann:
$=x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C)$
$=x \in A \wedge (\neg x \in B \wedge \neg x \in C)$
$=x \in A \wedge x \in A \wedge \neg x \in B \wedge \neg x \in C$
$=x \in A \wedge \neg x \in B \wedge x \in A \wedge \neg x \in C$
$=x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
$\Rightarrow A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

sei $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ beliebig, dann:
$=x \in A \wedge \neg x \in B \wedge x \in A \wedge \neg x \in C$
$=x \in A \wedge x \in A \wedge \neg x \in B \wedge \neg x \in C$
$=x \in A \wedge (\neg x \in B \wedge \neg x \in C)$
$=x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C)$
$=x \in A \setminus (B \cup C)$
$\Rightarrow A \setminus (B \cup C) \supseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$\Longrightarrow A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

sei $x \in A \setminus (B \setminus C)$ beliebig, dann:
$=x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge \neg x \in C)$
$=x \in A \wedge (\neg x \in B \vee x \in C)$
$=(x \in A \wedge \neg x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$
$=x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
$\Rightarrow A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

sei $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ beliebig, dann:
$=(x \in A \wedge \neg x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$
$=x \in A \wedge (\neg x \in B \vee x \in C)$
$=x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge \neg x \in C)$
$=x \in A \setminus (B \setminus C)$
$\Rightarrow A \setminus (B \setminus C) \supseteq (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

$\Longrightarrow A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

sei $x \in A \setminus (A \setminus B)$ beliebig, dann:
$=x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge \neg x \in B)$
$=x \in A \wedge (\neg x \in A \vee x \in B)$
$=(x \in A \wedge \neg x \in A) \vee (x \in A \wedge x \in B)$
$=(x \in A \wedge x \in B)$
$=x \in (A \cap B)$
$\Rightarrow A \setminus (A \setminus B) \subseteq (A \cap B)$

sei $x \in (A \cap B)$ beliebig, dann:
$=(x \in A \wedge x \in B)$
$=(x \in A \wedge \neg x \in A) \vee (x \in A \wedge x \in B)$
$=x \in A \wedge (\neg x \in A \vee x \in B)$
$=x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge \neg x \in B)$
$=x \in A \setminus (A \setminus B)$
$\Rightarrow A \setminus (A \setminus B) \supseteq (A \cap B)$

$\Longrightarrow A \setminus (A \setminus B) = (A \cap B)$

1.2 Übersetze in Mengeninklusion

1. i) $x \in Z \Rightarrow x \in M^C$
2. ii) $x \in G \Rightarrow x \in T$
3. iii) $x \in G^C \Rightarrow x \in H$
4. iv) $x \in R^C \Rightarrow x \in Z$
5. v) $x \in H \Rightarrow x \in R^C$

Zu Zeigen: $x \in M \Rightarrow x \in T$

1. $x \in R^C \Rightarrow x \in Z \Rightarrow x \in M^C$
2. $x \in H \Rightarrow x \in R^C \Rightarrow x \in Z \Rightarrow x \in M^C$
3. $x \in G^C \Rightarrow x \in H \Rightarrow x \in R^C \Rightarrow x \in Z \Rightarrow x \in M^C$
4. $x \in G^C \Rightarrow x \in M^C = x \in M \Rightarrow x \in G$
5. $x \in M \Rightarrow x \in G \Rightarrow x \in T$

$\Longrightarrow x \in M \Rightarrow x \in T$

1.3 Zeichne eine NAND-Schaltung

Regeln:

1. aus Übersichtsgründen: „NAND“=„N“
2. $a \vee b = (aNa)N(bNb)$
3. $a \wedge b = (aNb)N(aNb)$
4. $\neg a = aNa$

Umformulierung: $\Big[(a \vee b) \vee (c \vee \neg d)\Big] \wedge (c \wedge \neg a)$
$=$
$(((((aNa)N(bNb))N((aNa)N(bNb)))$
$N(((cNc)N((dNd)N(dNd)))N((cNc)N((dNd)N(dNd)))))$
$N(cN(aNa))N(cN(aNa)))$
$N(((((aNa)N(bNb))N((aNa)N(bNb)))$
$N(((cNc)N((dNd)N(dNd)))N((cNc)N((dNd)N(dNd)))))$
$N(cN(aNa))N(cN(aNa)))$
Abstraktion in Ebenen zur Grafischen Darstellung:
Grundbausteine (1. Ebene): $aNa \to A; bNb \to B; cNc \to C; dNd \to D$

$(((((A)N(B))N((A)N(B)))N(((C)N((D)N(D)))$
$N((C)N((D)N(D)))))$
$N(cN(A))N(cN(A)))$
$N(((((A)N(B))N((A)N(B)))N(((C)N((D)N(D)))$
$N((C)N((D)N(D)))))$
$N(cN(A))N(cN(A)))$
2. Ebene: $ANB \to F; DND \to G; cNA \to H$

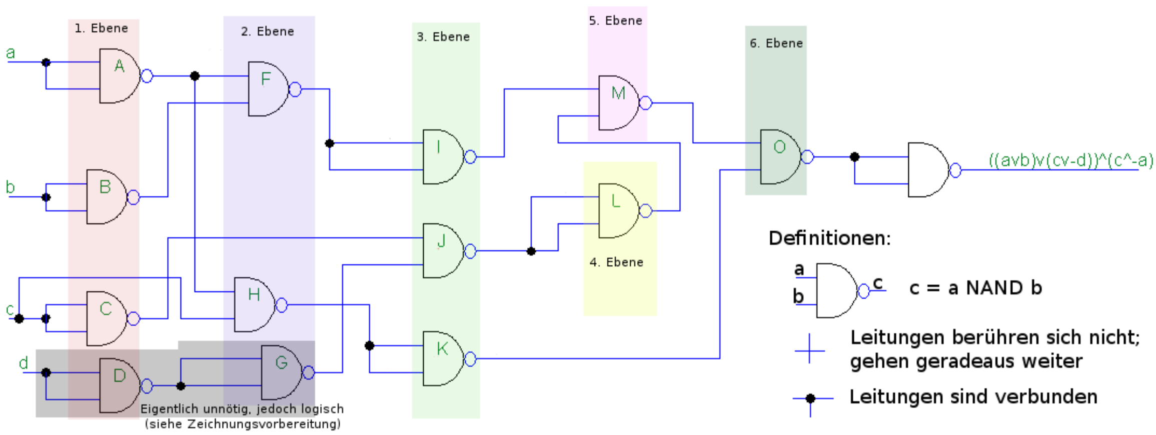
$(((FNF)N(((C)NG)N((C)NG)))$
$N(HNH))$
$N(((FNF)N(((C)NG)N((C)NG)))$
$N(HNH))$
3. Ebene: $FNF \rightarrow I; CNG \rightarrow J; HNH \rightarrow K$

$(((I)N((J)N(J)))NK)N(((I)N((J)N(J)))NK)$
4. Ebene: $JNJ \rightarrow L$

$(((I)N(L))NK)N(((I)N(L))NK)$
5. Ebene: $INL \rightarrow M$

$((M)NK)N((M)NK)$
6. Ebene: $MNK \rightarrow O$

$(O)N(O)$
Ergebnis: $\Longrightarrow ONO$



Alternative: Vereinfachung

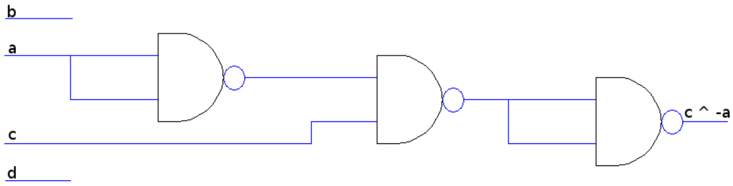
Da der Term $a \vee b \vee c \vee \neg d$ dann wahr ist, wenn c wahr ist, c aber für den nachfolgenden Teil $\wedge(c \wedge \neg a)$ Immer wahr sein muss, damit dieser Teil wahr ist, und selbiges lediglich auch auf $\neg a$ zutrifft, lässt sich die Gleichung auf $c \wedge \neg a$, also auf den rechten Teil reduzieren. Zum weiteren Beleg eine Wahrheitstabelle:

a	b	c	d	((a oder b) oder (c oder nicht d)) und (c und nicht a)	c und nicht a
1	1	1	1	FALSCH	FALSCH
1	1	1	0	FALSCH	FALSCH
1	1	0	1	FALSCH	FALSCH
1	1	0	0	FALSCH	FALSCH
1	0	1	1	FALSCH	FALSCH
1	0	1	0	FALSCH	FALSCH
1	0	0	1	FALSCH	FALSCH
1	0	0	0	FALSCH	FALSCH
0	1	1	1	WAHR	WAHR
0	1	1	0	WAHR	WAHR
0	1	0	1	FALSCH	FALSCH
0	1	0	0	FALSCH	FALSCH
0	0	1	1	WAHR	WAHR
0	0	1	0	WAHR	WAHR
0	0	0	1	FALSCH	FALSCH
0	0	0	0	FALSCH	FALSCH

Dies hätte den Vorteil, dass sich dadurch die NAND-Schaltung erheblich vereinfachen würde:

$(cn(ana))n(cn(ana))$

was folgende Schaltung ergeben würde:



1.4 XOR-Verknüpfung

a)

a	b	$(\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

b) Da das Byte b XOR c durch die bitweise Anwendung der Xor-Verknüpfung definiert ist, lässt sich das Problem des Zeigens auf einfache Bit-Aussagen zurückführen.

Folglich gilt:

Die Abbildung $f_b = c \rightarrow bXORc, b \in B$ ist invers, sofern gilt:

$c = f_b \rightarrow bXORf_b, b \in B$

Aufgrund der Zurückführung auf Bits lässt sich eine Wahrheitstabelle erstellen:

b	c	$f_b : c \rightarrow bXORc$	$c : f_b \rightarrow bXORf_b$
w	w	f	w
w	f	w	f
f	w	w	w
f	f	f	f

Da hiermit gezeigt wurde, dass $c = f_b \rightarrow bXORf_b$, gilt, dass für beliebiges b und beliebiges c einer beliebig langen Kombination (bei bitweiser Anwendung der XOR-Verknüfung) die Abbildung zu sich selbst invers ist.