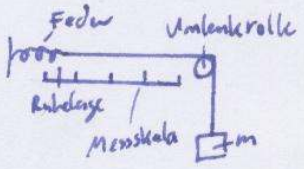
Julian Bergmann Matr. Nr. 1012877 Gruppe 5
Gruppenprüfer: S. Künzel

Versuch 2A

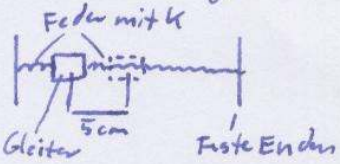
1) Durch Anhängen verschiedener Gewichte soll die Federkonstante verschiedener Federn bestimmt werden.
2) Die Eigenfrequenz und Dämpfungskonstante eines harmonischen Oszillators sollen durch die Halbwertszeit d. Amplitude bestimmt werden.
3) Die Eigenfrequenzen und Schwebungsfrequenz zweier gekoppelten harmonischen Oszillatoren sollen gemessen und mit Rechenwerten verglichen werden.

Versuchsaufbau:

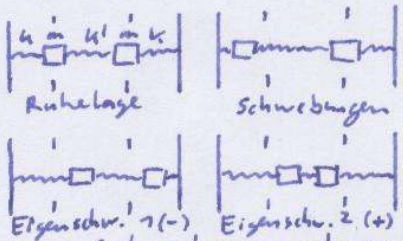
Beschreibung:



Teil 1: Eine Masse wird an einem Seil über eine Umlenkrolle an einer Feder befestigt. Die Ruhelage für das Gewicht der Halterung und der normalen Federausdehnung werden notiert. Nun werden nacheinander 10g, 20g, 30g, 40g und 50g an das Seil gehängt und die Auslenkung von der Ruhelage gemessen. Über Gewichtskraft und Auslenkung lässt sich nun die Federkonstante bestimmen. Dies wird mit 2 untersch. Federn gemacht.



Teil 2: Ein Gleiter wird zwischen 2 festen Punkten mit 2 gleichen Federn befestigt und 5cm ausgelenkt. Nun wird die Schwingungsdauer und die Zeit, nach der sich die Amplitude halbiert hat, gemessen. Durch die bekannte Federkonstante und den gemessenen Werten kann nun die Dämpfungskonstante ausgerechnet werden.



Teil 3: Teil 2 wird mit einem Oszillator erweitert, sodass 2 gekoppelte Oszillatoren mit 2 festen Enden und einer schwächeren Kopplungsfeder (schw. als Randfedern) entstehen. Es werden nun nacheinander die beiden Eigenschwingungen erregt und die zugehörigen Schwingungsdauern gemessen. Durch Auslenkung des einen und Festhalten des anderen Gleiters werden danach Schwebungen erzeugt. Hier wird die Schwingungs- und die Schwebungsfrequenz gemessen. Alle gemessenen Frequenzen sind nun mit dem errechneten Wert zu vergleichen.

Formeln:

Teil 1: $F = -k \cdot \Delta x$, $F = m \cdot g$

Teil 2: $w = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow m = \frac{kT^2}{4\pi^2}$, $T_{\frac{1}{2}} = \tau_A \ln(2) = \frac{2m}{b}\ln(2)$

$\Rightarrow b = \frac{2m \cdot \ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}}$

Teil 3: $w_- = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $w_+ = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$, $w_0 = \frac{w_+ + w_-}{2}$, $\Delta w = \frac{w_+ - w_-}{2}$

Messungen:

Teil 1:

Feder	x_{Ruhe}	m	x	Δx	k
k	15,2cm	10g	18,2cm	3cm	3,27 $\frac{N}{m}$
		20g	21,1cm	5,9cm	3,33 $\frac{N}{m}$
		30g	24,1cm	8,9cm	3,31 $\frac{N}{m}$
		40g	27,1cm	11,9cm	3,30 $\frac{N}{m}$
		50g	30,1cm	14,9cm	3,29 $\frac{N}{m}$
k'	21,5cm	10g	27,1cm	5,6cm	1,75 $\frac{N}{m}$
		20g	32,6cm	11,1cm	1,76 $\frac{N}{m}$
		30g	38,4cm	16,9cm	1,74 $\frac{N}{m}$
		40g	44,0cm	22,5cm	1,74 $\frac{N}{m}$
		50g	49,6cm	28,1cm	1,75 $\frac{N}{m}$

Angabe von k zur Kontrolle. Grafische Auswertung liegt bei!

Teil 2:

Ruhelage: 19,8cm

$T_{\frac{1}{2}} = 103,44s$

$T_1 = 1,397s$, $T_2 = 1,305s$, $T_3 = 1,397s$, $T_4 = 1,305s$

$T_5 = 1,398s$

k siehe Teil 1.

Teil 3:

$f_- = 0,523\,Hz$, $f_+ = 0,757\,Hz$

$T_0 = 1,56s$, $\Delta T = 42,202s$

Rechnungen:

Teil 1:

Rechnerische Bestimmung k: Mittelwert aller errechneten Federkonstanten: $k_\varnothing = 3,30 \frac{N}{m}$, $k'_\varnothing = 1,75 \frac{N}{m}$

Grafische Auswertung: $k = \left(\frac{x_5 - x_4}{x_5 - x_1}\right)^{-1} = \frac{(50,5g - 11,3g) \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}}{14,9cm - 3cm}$

$= 3,297 \frac{N}{m} = 3,3 \frac{N}{m}$

$k' = \frac{(50g - 10,6g) \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}}{28,1cm - 5,6cm} = 1,76 \frac{N}{m^2}$

Es soll mit den grafisch ermittelten Werten weiter gerechnet werden.

Teil 2:

$T_\varnothing = \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=1}^{5} T_i = 1,36s$

$m = \frac{k T^2}{4\pi^2} = \frac{2 \cdot 3,3 \frac{N}{m} \cdot (1,36s)^2}{4\pi^2} = 0,31\,kg$

$b = \frac{2m}{T_{\frac{1}{2}}} \cdot \ln(2) = \frac{2 \cdot 0,155kg}{103,44s} \cdot \ln(2) = 0,00415 \frac{kg}{s}$

$f = \frac{1}{T} = 0,735\,Hz$

Teil 3: $\omega_- = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3{,}3\,\frac{N}{m}}{0{,}275\,kg}} = 3{,}263\,Hz$

$\omega_+ = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}} = \sqrt{\frac{3{,}3\,\frac{N}{m} + 2\cdot 1{,}76\,\frac{N}{m}}{0{,}275\,kg}} = 4{,}69\,Hz$

$\omega_0 = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} = 3{,}977\,Hz$

$\Delta\omega = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} = 1{,}428\,Hz$

Gemessene Werte	Errechnete Werte
$\omega_- = 2\pi f_- = 3{,}286\,Hz$	$\omega_- = 3{,}263\,Hz$
$\omega_+ = 2\pi f_+ = 4{,}756\,Hz$	$\omega_+ = 4{,}69\,Hz$
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 4{,}028\,Hz$	$\omega_0 = 3{,}977\,Hz$
$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\Delta T} = 0{,}149\,Hz$	$\Delta\omega = 0{,}714\,Hz$

Fehlerberechnung

Teil 1: $\frac{\Delta k}{k} = \frac{2\Delta x}{x_5 - x_n} = \frac{2\cdot 0{,}6\,cm}{19{,}4\,cm - 3\,cm} = 0{,}10 \triangleq 10\,\%$

(max. Abw. in X-Richtung bei x_2)

$\Rightarrow \Delta k = 0{,}33\,\frac{N}{m}$

$\frac{\Delta k'}{k'} = \frac{2\Delta x}{x_5 - x_n} = \frac{2\cdot 1{,}32\,cm}{24{,}1\,cm - 5{,}6\,cm} = 0{,}117 \triangleq 11{,}7\,\%$

$\Rightarrow \Delta k' = 0{,}21\,\frac{N}{m}$

Teil 2: $\Delta m = \sqrt{\left(\frac{\partial m}{\partial k}\Delta k\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial T}\Delta T\right)^2}$

$m = \frac{kT^2}{4\pi^2} \Rightarrow \frac{dm}{dk} = \frac{T^2}{4\pi^2}, \quad \frac{dm}{dT} = \frac{2kT}{4\pi^2}$

$\Delta T = \max(|T_i - \overline{T}|) = 0{,}055\,s \Rightarrow \Delta f = \frac{\Delta T}{T} = \frac{0{,}055\,s}{1{,}36\,s} \Rightarrow \Delta f = 0{,}03\,Hz$

$\Rightarrow \Delta m = \sqrt{\left(\frac{T^2}{4\pi^2}\cdot 0{,}33\,\frac{N}{m}\right)^2 + \left(\frac{2kT}{4\pi^2}\cdot 0{,}055\,s\right)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{(1{,}36\,s)^2}{4\pi^2}\cdot 0{,}33\,\frac{N}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\cdot 6{,}6\,\frac{N}{m}\cdot 1{,}36\,s}{4\pi^2}\cdot 0{,}055\,s\right)^2}$

$= 0{,}0294\,kg$

$\Delta b = \sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial m}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial T_{\frac{1}{2}}}\Delta T_{\frac{1}{2}}\right)^2}$

$b = \frac{2m}{T_{\frac{1}{2}}}\cdot\ln(2) \Rightarrow \frac{db}{dm} = \frac{2\ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{db}{dT_{\frac{1}{2}}} = -\frac{2m\ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}^2}$

$\Delta T_{\frac{1}{2}} = 0{,}02\,s$

$\Rightarrow \Delta b = \sqrt{\left(\frac{2\ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}}\Delta m\right)^2 + \left(-\frac{2m\ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}^2}\Delta T_{\frac{1}{2}}\right)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{2\cdot\ln(2)}{103{,}44\,s}\cdot 0{,}0294\,kg\right)^2 + \left(-\frac{2\cdot 0{,}310\,kg\cdot\ln(2)}{(103{,}44\,s)^2}\cdot 0{,}02\,s\right)^2}$

$= 0{,}000394\,\frac{kg}{s}$

Teil 3: $\Delta w_- = \sqrt{\left(\frac{dw_-}{dk}\Delta k\right)^2 + \left(\frac{dw_-}{dm}\Delta m\right)^2}$

$w_- = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{dw_-}{dk} = \frac{1}{2\sqrt{km}}$, $\frac{dw_-}{dm} = -\sqrt{\frac{k}{4m^3}}$

$\Rightarrow w_- = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{km}}\Delta k\right)^2 + \left(-\sqrt{\frac{k}{4m^3}}\Delta m\right)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{0{,}33\frac{N}{m}}{2\cdot\sqrt{3{,}3\frac{N}{m}\cdot 0{,}31kg}}\right)^2 + \left(-\sqrt{\frac{3{,}3\frac{N}{m}}{4\cdot(0{,}31kg)^3}}\cdot 0{,}0294kg\right)^2}$

$= 0{,}225Hz$

$\Delta w_+ = \sqrt{\left(\frac{dw_+}{dk}\Delta k\right)^2 + \left(\frac{dw_+}{dk'}\Delta k'\right)^2 + \left(\frac{dw_+}{dm}\Delta m\right)^2}$

$w_+ = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}} \Rightarrow \frac{dw_+}{dk} = \frac{1}{2\sqrt{(k+2k')m}}$, $\frac{dw_+}{dk'} = \frac{1}{\sqrt{(k+2k')m}}$

$\frac{dw_+}{dm} = -\sqrt{\frac{k+2k'}{4m^3}}$

$\Rightarrow \Delta w_+ = \sqrt{\left(\frac{\Delta k}{2\sqrt{(k+2k')m}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta k'}{\sqrt{(k+2k')m}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{k+2k'}{4m^3}}\Delta m\right)^2}$

$= 0{,}288H$

$\Delta w_0 = \frac{w_+ + w_-}{2} \sqrt{\left(\frac{\Delta w_+}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta w_-}{2}\right)^2} = 0{,}183Hz$

$\Delta\Delta w = \Delta w_0 = 0{,}183Hz$

Diese Fehler gelten für errechnete Werte.
Die gemessenen haben den Fehler $\Delta\nu = 0{,}005Hz$

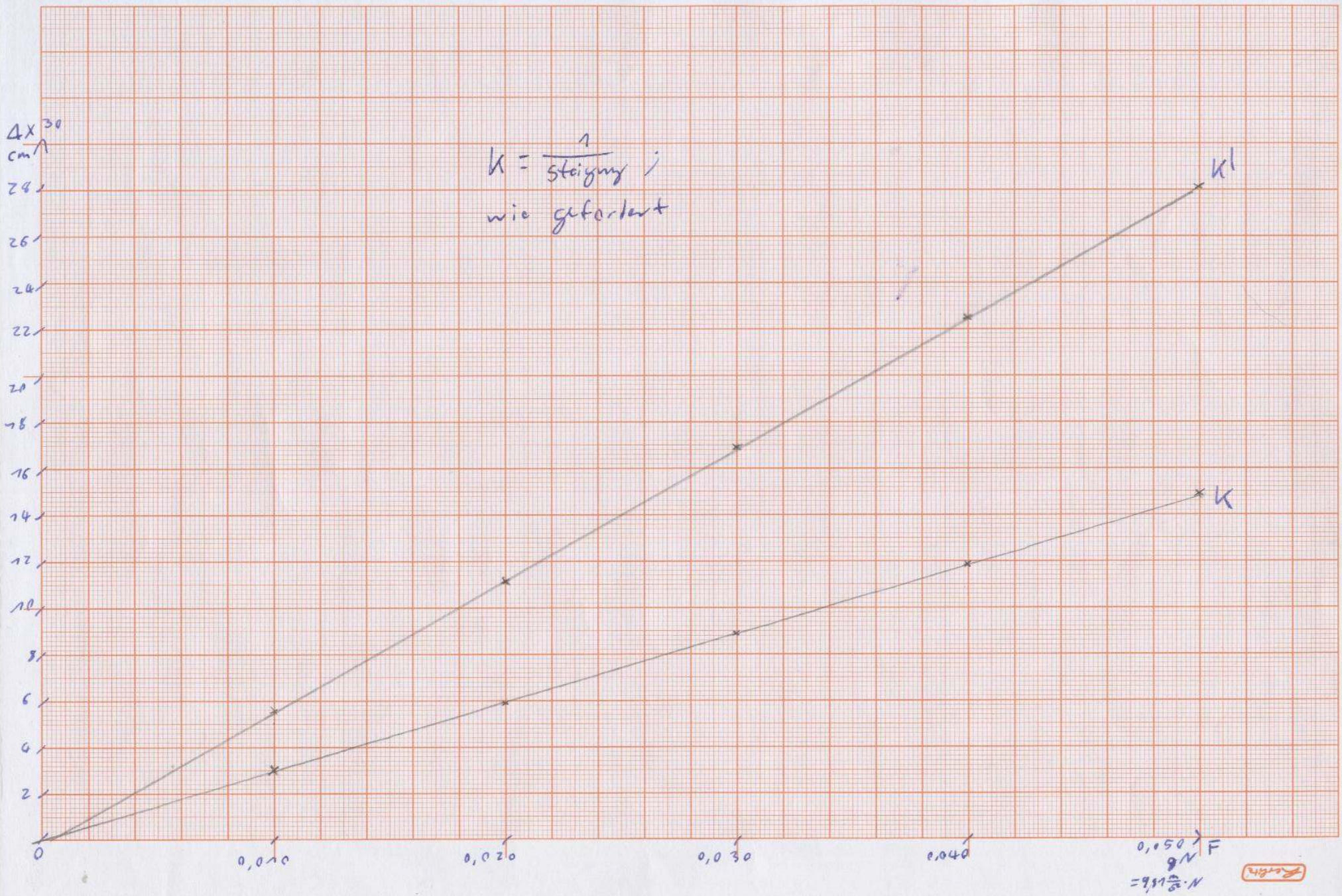
Auswertung:

	Gemessene Werte	Fehler
Teil 1	$k = 3{,}3\frac{N}{m}$	$\pm 0{,}33\frac{N}{m}$
	$k' = 1{,}76\frac{N}{m}$	$\pm 0{,}21\frac{N}{m}$
Teil 2	$m = 0{,}31kg$	$\pm 0{,}0294kg$
	$b = 4{,}15\cdot10^{-3}\frac{kg}{s}$	$\pm 0{,}394\cdot10^{-3}\frac{kg}{s}$
	$f = 0{,}735Hz$	$\pm 0{,}03Hz$
Teil 3	$w_- = 3{,}286Hz$	je $\pm 0{,}005Hz$
Gemessen	$w_+ = 4{,}756Hz$	
	$w_0 = 4{,}028Hz$	
	$\Delta w = 0{,}149Hz$	
Gerechnet	$w_- = 3{,}263Hz$	$\pm 0{,}225Hz$
	$w_+ = 4{,}69Hz$	$\pm 0{,}288Hz$
	$w_0 = 3{,}977Hz$	$\pm 0{,}183Hz$
	$\Delta w = 0{,}714Hz$	$\pm 0{,}183Hz$

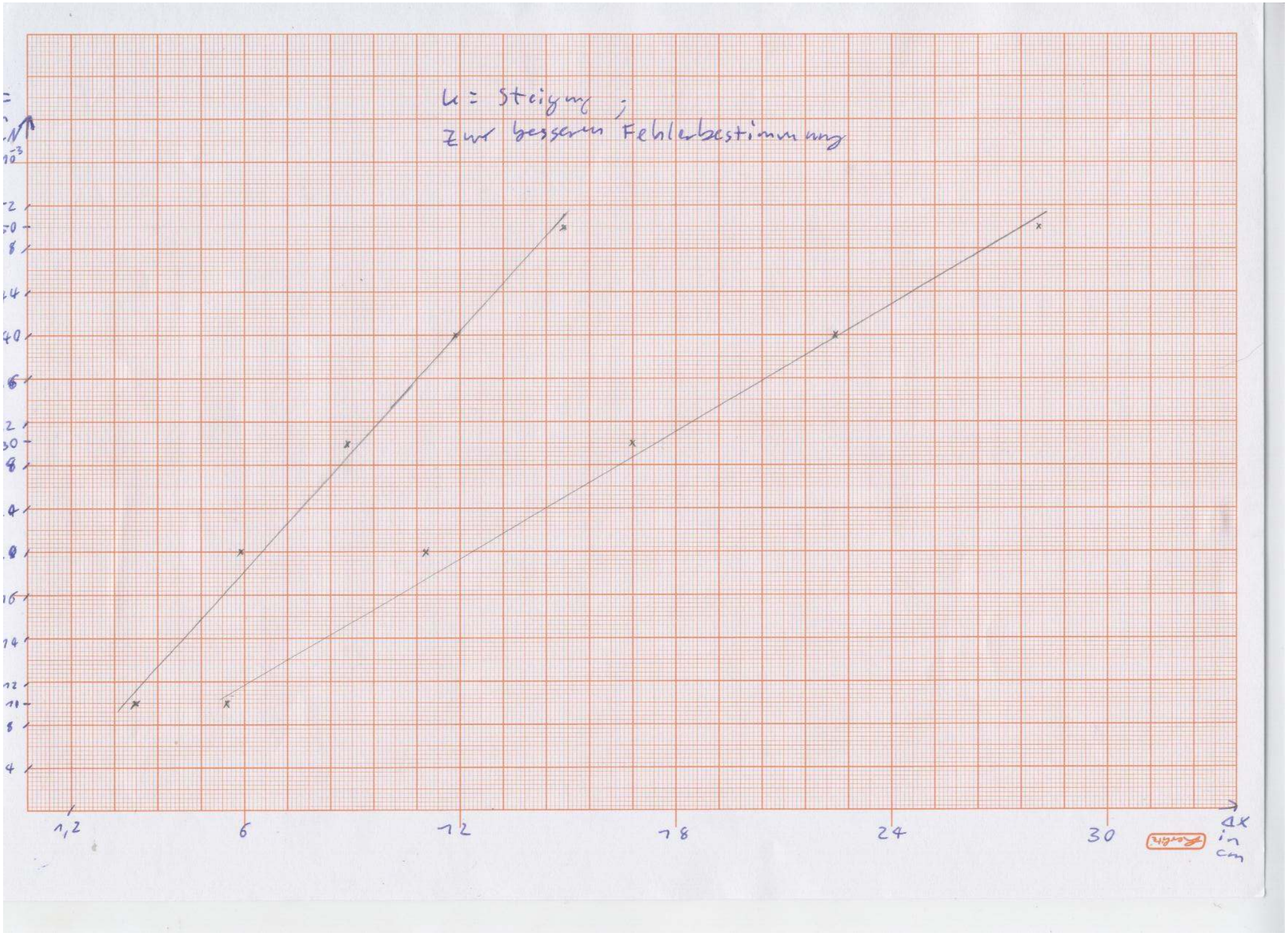
Teil 1: Abzisse und Ordinate wurden in der grafischen Darstellung vertauscht, um mit der Steigung direkt auf k schließen lassen zu können.
Außerdem kann so der zeichnerische Fehler für k leichter bestimmt werden.
Eine Prüfung über eine statistische Angleichung eines Taschenrechners liefert ähnliche Werte für k.

Teil 2: Die Fehler erscheinen hinreichend klein, um den Versuch als Erfolg zu werten.

Teil 3: Die gemessenen Frequenzen liegen im Fehlerbereich der errechneten Werte, ausgenommen 5W.
Die starke Abweichung und eine Messmethodenunsicherheit lassen darauf schließen, dass Hier ein Messfehler von 5W vorliegt.



Δx 30
cm
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0,010
0,020
0,030
0,040
0,050
F
g N
= 9,81 m/s² · N
K'
K
K = 1/Steigung ;
wie gefordert


k = Steigung;
Zur besseren Fehlerbestimmung
1,2
6
12
18
24
30
Δx in cm

Julian Bergmann Matr. Nr. 1012877 Gruppe 5

Gruppenprüfer: S. Künze

Versuch 2B

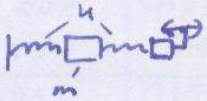
Teil 1: Aus der Resonanzkurve eines gedämpften, durch einen Motor angeregten Oszillators soll dessen Resonanzfrequenz und die Abklingzeit des Systems bestimmt werden.

Teil 2: Für ein System aus zwei bzw. drei gekoppelten Oszillatoren und festen Enden soll die Eigenfrequenz ermittelt und mit den theoretischen Werten verglichen werden.

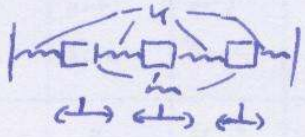
Versuchsaufbau:

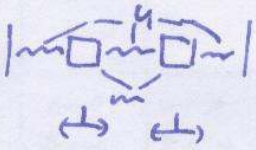
Beschreibung:

Teil 1: Ein Gleiter wird mit Federn an ein festes Ende und einen Anregungsmotor gespannt. Für verschiedene Anregungsfrequenzen wird nun die Amplitude dieses Oszillators gemessen, sodass sich daraus eine Resonanzkurve erstellen lässt. Außerdem lässt sich die Resonanzfrequenz messen. Indem man nun in der Resonanzkurve $A(\omega=0)$ abliest, kann man danach die Abklingzeit ausrechnen.



Teil 2: Man koppelt nun 3 (bzw. 2) Gleiter aneinander zwischen 2 feste Enden. Danach werden die 3 (bzw. 2) Gleiter um festgelegte Abstände aus ihrer Ruhelage ausgelenkt und die jeweilige Eigenfrequenz über den PC notiert. Dieser Vorgang wird mit 3 verschiedenen Abstandstripeln* ausgeführt. Zuletzt sollen diese Eigenfrequenzen mit den theoretischen Werten verglichen werden.





*bei 2 Reitern mit 2 Abstandspaaren.

Formeln:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$\frac{x_0(\omega=\omega_0)}{x_0(\omega=0)} = \omega_0 \gamma$$

$$\frac{1}{\gamma} = 2\Delta\omega$$

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

Messungen:

Teil 1:

Umdrehungen Motor $\frac{1}{min}$	gemessene Frequenz	Ausschlag max	Ausschl. min.	Ruhelage	Amplitude
0,5	0,102 Hz	2650	2417	2533,5	116,5
1	0,208 Hz	2646	2432	2539	107
1,5	0,334 Hz	2789	2396	2628,5	196,5
2	0,457 Hz	2727	2319	2524	204
2,5	0,58 Hz	2859	2173	2516	343
3	0,695 Hz	3275	1777	2526	749
3,9	0,75 Hz	3251	1618	2434,5	816,5
4	0,75 Hz	2859	2166	2512,5	346,5
4,5	0,75 Hz	2704	2312	2508	196
5	1,179 Hz	2550	2452	2501	49
Reson.: 3,2	0,75 Hz	3201	1010	2105	1095,5

Aus gemessenen Frequenzen und Amplitude wird eine Resonanzkurve gefittet.

$\Rightarrow$ Amplitude $x_0(\omega=0) = 100$ skt , $\Delta\omega = 0,052$ Hz

Teil 2:

3 Oszillatoren

Auslenkung 1:	Richtung / Wert	→ 3cm	→ 6cm	→ 3cm	$\lambda_1 = 2l$
Auslenkung 2:	Richtung / Wert	→ 5cm	0 0cm	← 5cm	$\lambda_2 = l$
Auslenkung 3:	Richtung / Wert	→ 4cm	← 4cm	→ 4cm	$\lambda_3 = \frac{2l}{3}$

Es gilt: $L = 4a = 112$ cm $\Rightarrow a = 28$ cm

Eigenfrequenzen: 1: 0,402 Hz
2: 0,75 Hz
3: 0,975 Hz

2 Oszillatoren

Auslenkung 1:	Richtung / Wert	→ 5cm	← 5cm
Auslenkung 2:	Richtung / Wert	→ 5cm	→ 5cm

Es gilt: $L = 3a = 83$ cm $\Rightarrow a = 27,67$ cm

Für 1: $\lambda = 2L$

Für 2: $\lambda = 2a$

Eigenfrequenzen: 1: 0,91 Hz
2: 0,52 Hz

Rechnungen:

Teil 1: w_0 (gemessen) = 0,75 Hz

Rechnung 1: $\frac{x_0(w_0)}{x_0(0) \cdot w_0} = \gamma$

$= \frac{1010 \text{ Skt}}{100 \text{ Skt} \cdot 0{,}75 \text{ Hz}} = 13{,}47 \text{ s}$

Rechnung 2: $\gamma = \frac{1}{2\Delta w} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}052 \text{ Hz}} = 9{,}615$

Teil 2: 3 Oszillatoren:

Auslenkung 1:

$w = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$

$k = 3{,}3 \frac{N}{m}$

$m = 0{,}31 \text{ kg}$

$k = \frac{\pi}{4a} \Rightarrow \frac{k \cdot a}{2} = \frac{\pi a}{2 \cdot 4a} = \frac{\pi}{8}$

$\Rightarrow w = 2 \cdot \sqrt{\frac{3{,}3 \frac{N}{m}}{0{,}31 \text{ kg}}} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$= 2{,}497 \text{ Hz}$

$\Rightarrow f = \frac{w}{2\pi} = 0{,}397 \text{ Hz}$

Auslenkung 2:

$k = \frac{\pi}{2a} \Rightarrow \frac{ka}{2} = \frac{\pi a}{2 \cdot 2 \cdot a} = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow w = 2 \cdot \sqrt{\frac{3{,}3 \frac{N}{m}}{0{,}31 \text{ kg}}} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= 4{,}61 \text{ Hz}$

$\Rightarrow f = \frac{w}{2\pi} = 0{,}734 \text{ Hz}$

Auslenkung 3:

$k = \frac{3\pi}{4a} \Rightarrow \frac{ka}{2} = \frac{3\pi a}{2 \cdot 4 \cdot a} = \frac{3}{8}\pi$

$\Rightarrow w = 2 \cdot \sqrt{\frac{3{,}3 \frac{N}{m}}{0{,}31 \text{ kg}}} \sin\left(\frac{3}{8}\pi\right)$

$= 6{,}03 \text{ Hz}$

$\Rightarrow f = \frac{w}{2\pi} = 0{,}959 \text{ Hz}$

2 Oszillatoren:

Auslenkung 1:

$k = \frac{2\pi}{3a} \Rightarrow \frac{ka}{2} = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow w = 2 \cdot \sqrt{\frac{3{,}3 \frac{N}{m}}{0{,}31 \text{ kg}}} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5{,}65 \text{ Hz}$

$\Rightarrow f = \frac{w}{2\pi} = 0{,}899 \text{ Hz}$

Auslenkung 2:

$k = \frac{\pi}{3a} \Rightarrow \frac{ka}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow w = 2 \cdot \sqrt{\frac{3{,}3 \frac{N}{m}}{0{,}31 \text{ kg}}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3{,}26 \text{ Hz}$

$\Rightarrow f = \frac{w}{2\pi} = 0{,}519 \text{ Hz}$

Auswertung:

Teil 1: $w_0 = 0{,}75\,Hz$, $\gamma_1 = 13{,}47$, $\gamma_2 = 9{,}615$

Die große Abweichung zwischen den beiden Rechenmethoden für γ_1 und γ_2 lässt darauf schließen, dass anhand mangelhafter Messpunkte entweder die Linienbreite oder das Maximum ($\Rightarrow \frac{\hat{}}{\sqrt{2}}$ Maximum = Höhe (Linienbreite)) nicht korrekt bestimmt wurde. w_0 sollte davon unbeeinflusst bleiben.

Ablesegenauigkeit für w_0: $\Delta w_0 = 0{,}005\,Hz$.

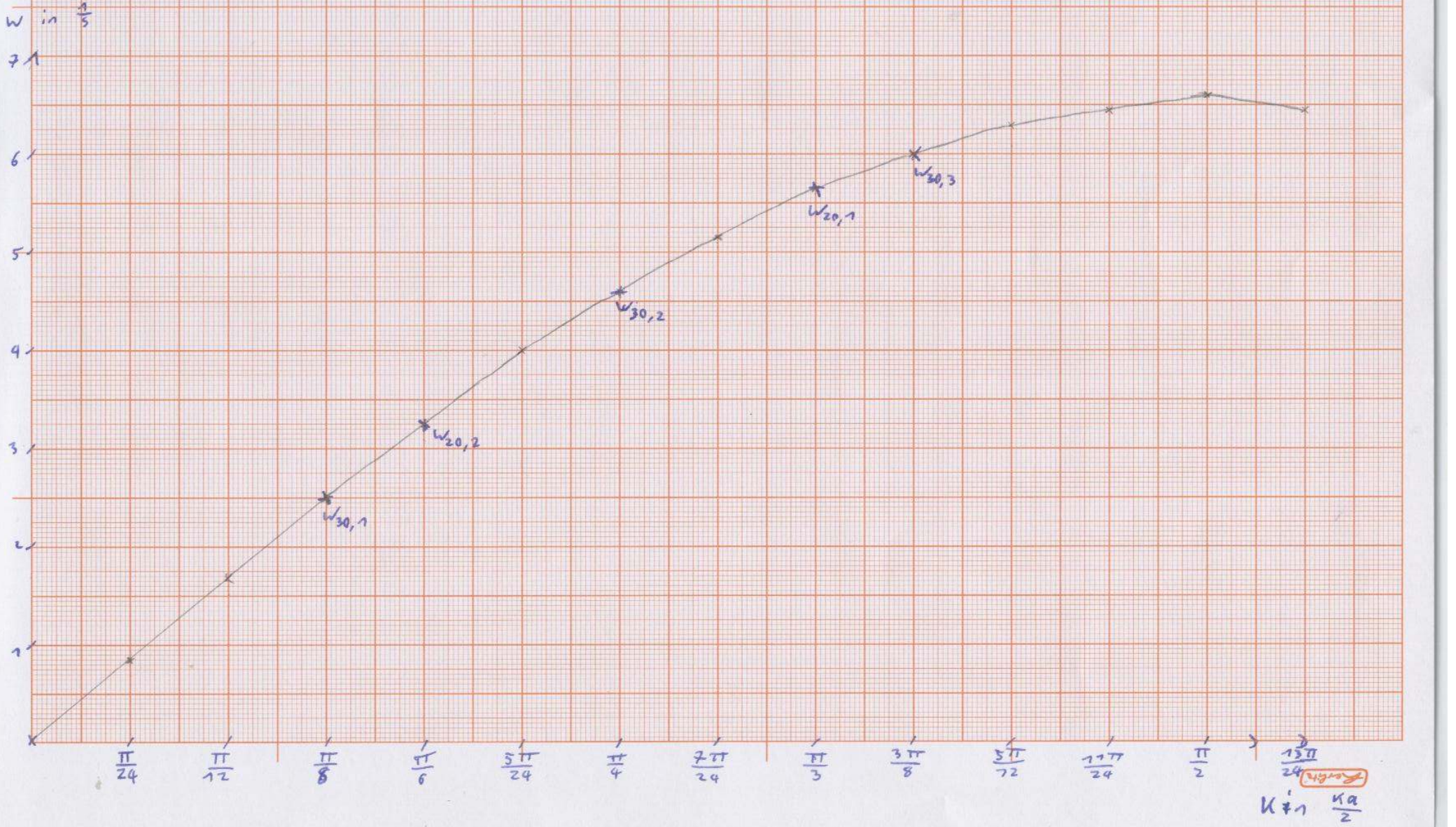
Teil 2:

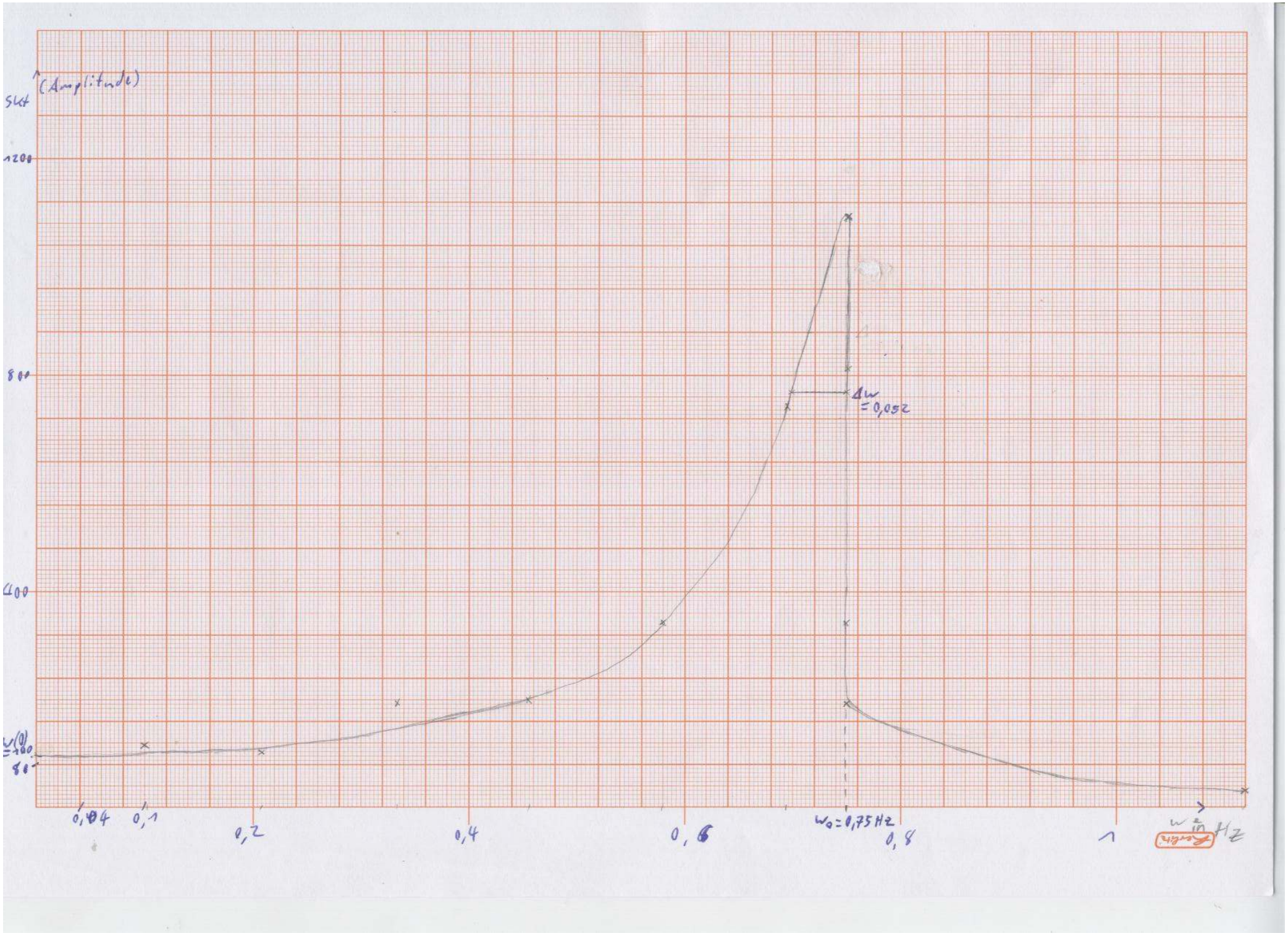
	gemessene Frequenz	errechnete Frequenz
3 Osz.	0,402 Hz	0,397 Hz
	0,750 Hz	0,734 Hz
	0,975 Hz	0,959 Hz
2 Osz.	0,970 Hz	0,899 Hz
	0,520 Hz	0,519 Hz

Die geringe Abweichung zwischen errechnetem und gemessenem Wert lassen auf eine gelungene Messung schließen!

Werte tabelle:

X	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{24}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{24}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{24}$
f(x)	0	0,85	1,69	2,5	3,26	3,47	4,61	5,18	5,65	6,13	6,3	6,47	6,53	6,47




(Amplitude)
1200
800
400
0,04
0,1
0,2
0,4
0,6
0,8
1
Δw = 0,052
w₀ = 0,75 Hz
Hz