Julian Bergmann (@physik)   Matr. Nr 1012877   Gruppe 5

Gruppenprüfer: M. Ullrich

Versuch 1 A vom 10.3.10

Teil 1: Es soll der Mittelwert und der mittlere Fehler eines Würfelexperiments bestimmt werden.

Teil 2: Die Zahl der pro Wurf gewürfelten Einsen soll für 5 und 20 Würfel mit der Poissonverteilung in Form eines Histogrammes verglichen werden.

Teil 3: Die Ergebnisse einer Dartwurfsimulation sind in eine Gauß-funktion zu fitten.

Versuchsdurchführung:

Die Simulationen werden mittels Makros in einem Programm an einem Computer durchgeführt und grafisch dargestellt, bzw. rechnerisch z.T. ausgewertet.

Teil 1: 1) Es wird mit einem Würfel 100 mal gewürfelt. Der Mittelwert und die mittleren Fehler für den Einzel- und den Mittelwert sollen mithilfe der ausgegebenen Werte bestimmt werden.

2) Der Versuch wird mit 10^3, 10^4, 10^5 und 10^6 Würfen wiederholt und die Standardabweichung doppellogarithmisch gegen Anzahl der Würfe graphisch dargestellt.

3) Zuletzt soll der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung für die bekannte Wahrscheinlichkeit eines Würfels angegeben werden.

Teil 2: 1) Bei 100 Würfen von 5 Würfeln soll anhand der gemessenen Häufigkeiten der Mittelwert und die Standardabweichung für die Anzahl der pro Wurf gewürfelten 1en ermittelt werden.

2) Der Versuch wird mit 10^3, 10^4 und 10^5 Würfen wiederholt und die Ergebnisse in eine Tabelle eingetragen.

3) Über das Histogramm mit 10^5 Würfen wird eine Poissonfunktion gelegt und $n \cdot p$ ermittelt.

3) Man wiederhole den Versuch nun mit 10^5 Würfen und 20 Würfeln und vergleicht eine über das Histogramm gelegte Poisson-Funktion mit Binomialverteilung.

Teil 3: 1) In der Simulation werden Dartpfeile mit einer homogenen Trefferwahrscheinlichkeit auf eine quadratische Wand geworfen.
Bei 200 Pfeilen pro Wurf und 10^5 Würfen soll mittels Gaußverteilung der Mittelwerd und dessen Standardabweichung zu berechnen und zu untersuchen, wieviele Dartpfeile in der linken Hälfte der Wand gelandet sind.

2) Das ausgegebene Histogramm soll durch eine Gauß-funktion gefittet werden, wobei der Güteparameter χ^2 möglichst klein sein soll. χ^2/F soll berechnet werden.

3) Man wiederhole den Versuch mit 5 Pfeilen pro Wurf. Auch hier soll das Histogramm wieder gefittet werden.

Messungen/Rechnung:

Teil 1:

1) $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} h_i x_i$

$= \frac{1}{100}\cdot(21\cdot 1 + 17\cdot 2 + 12\cdot 3 + 15\cdot 4 + 11\cdot 5 + 24\cdot 6)$

$= 3{,}5$

$\sigma(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n} h_i (x-\bar{x})^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{99}\cdot(21\cdot(1-3{,}5)^2 + 17\cdot(2-3{,}5)^2 + 12\cdot(3-3{,}5)^2 + 15\cdot(4-3{,}5)^2 + 11\cdot(5-3{,}5)^2 + 24\cdot(6-3{,}5)^2}$

$= 1{,}88$

$\sigma(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma(x) = \frac{1}{10}\cdot 1{,}88 = 0{,}188$

x_i	1	2	3	4	5	6
Anzahl	21	17	12	15	11	24

2)

1 Würfel	$\sigma(x)$	$\sigma(\bar{x})$	$\bar{x}$
10^3 Wurf	1,70959	0,054062	3,435
10^4 Wurf	1,70967	0,0170967	3,5225
10^5 Wurf	1,70776	0,00540041	3,50144
10^6 Wurf	1,70821	0,00170821	3,4998

3) $\langle x \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ mit $p_i = p = \frac{1}{6}$ bei Laplace-Würfel.

$= 3{,}5$

$V(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \langle x \rangle)^2$

$= \frac{1}{6}\left((1-3{,}5)^2 + (2-3{,}5)^2 + (3-3{,}5)^2 + (4-3{,}5)^2 + (5-3{,}5)^2 + (6-3{,}5)^2\right)$

$= \frac{35}{12} = 2{,}92$

$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{35}{12}} = 1{,}708$

Teil 2:

1)

Häufigkeit	0	1	2	3	4	5
Anzahl Würfe	37	38	23	2	0	0

$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} h_i x_i = \frac{1}{100}\cdot(38+46+6) = 0{,}9$

$\sigma(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n} h_i (x-\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{99}\cdot(37\cdot(0-0{,}9)^2 + 38\cdot(1-0{,}9)^2 + 23\cdot(2-0{,}9)^2 + 2\cdot(3-0{,}9)^2)} = 0{,}823$

N	$\sigma(\bar{x})$	$\sigma(x)$	$\bar{x}$
1000	0,0263524	0,833337	0,838
10^4	0,00823551	0,823551	0,8365
10^5	0,00263128	0,832084	0,83206

3) n: Anzahl Objekte = 5
p: Wahrsch. für 1 bei einem Wurf = $\frac{1}{6}$
$np = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

4) Binomialverteilung scheint besser auf die Messpunkte zu passen als Poissonverteilung. Vermutlich ist p also nicht klein genug.

Teil 3:

1) $\langle x \rangle \approx \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = np = 0{,}5 \cdot 200 = 100$

$\sigma(x) = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0{,}5^2} = \sqrt{50} = 7{,}07$

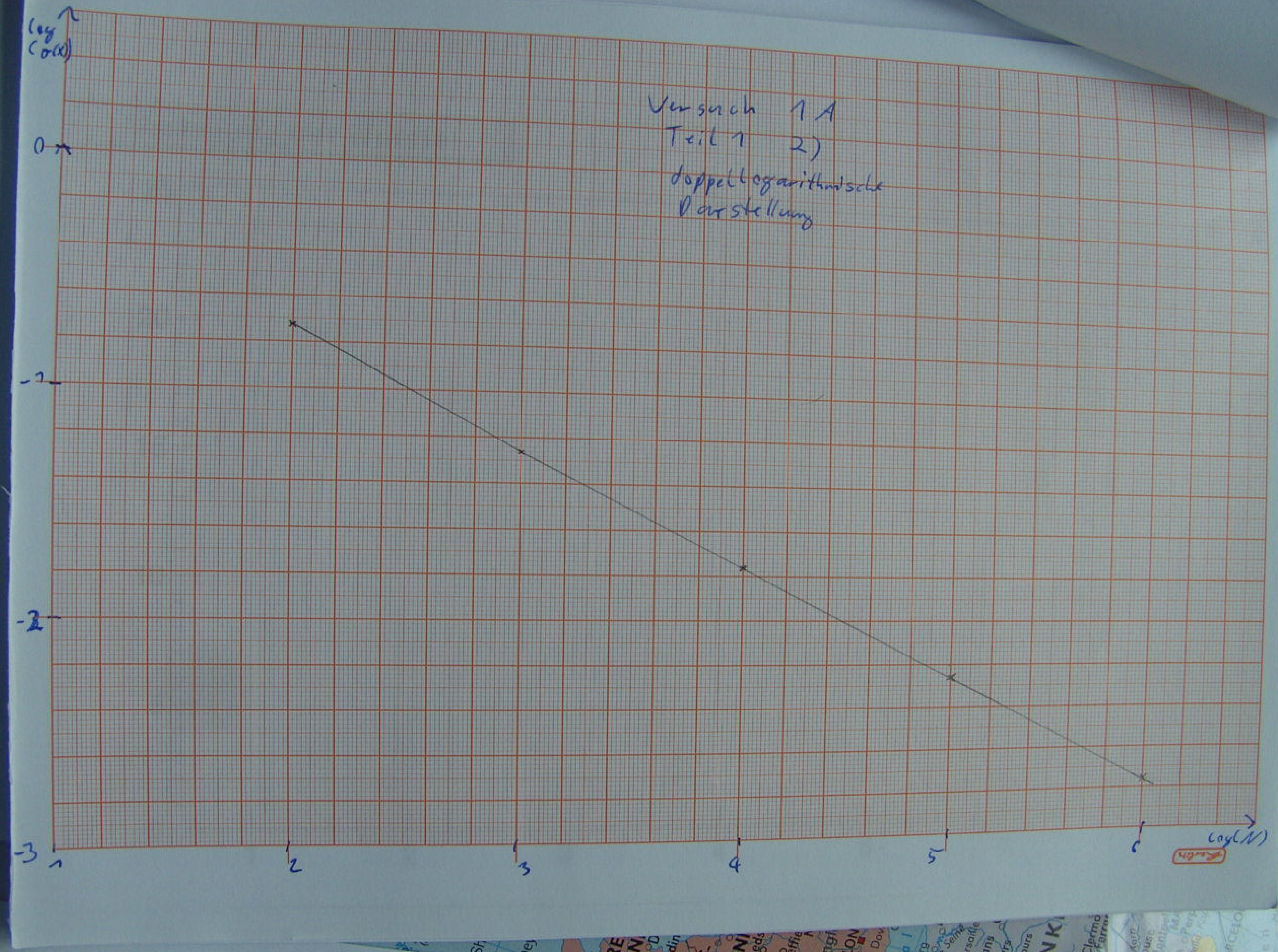
2) Benutzt wurden $H = 561{,}5$; $M = 100$; $\sigma = 7{,}071$; $F = 48$ und daraus dann $\chi^2 = 48{,}426$.

$\frac{\chi^2}{F} = \frac{48{,}426}{48} = 1{,}0089$

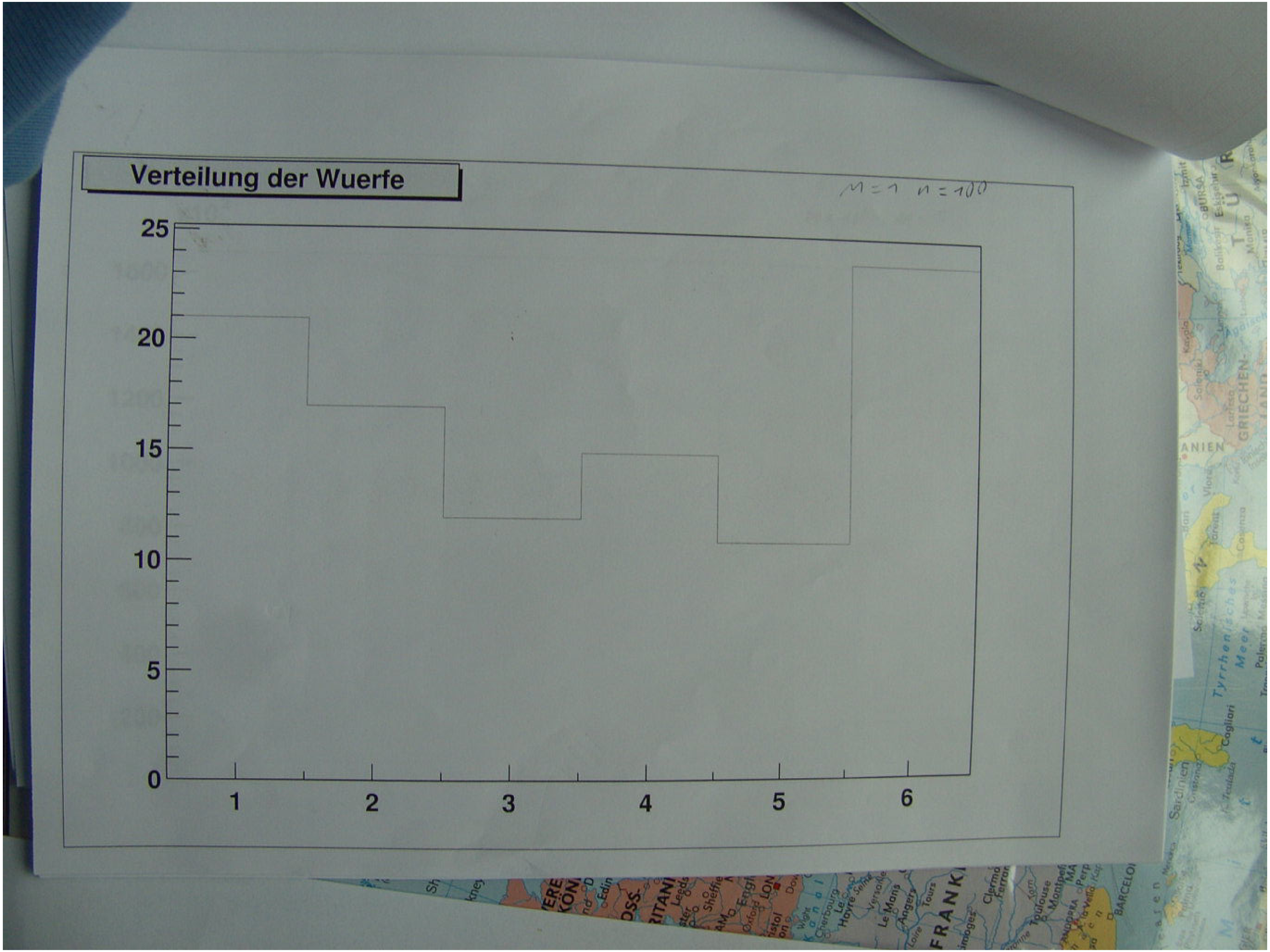
3) Benutzt wurde nun $H = 3550$; $M = 2{,}5$; $\sigma = 1{,}12$; $F = 3$ und daraus dann $\chi^2 = 30{,}8211$

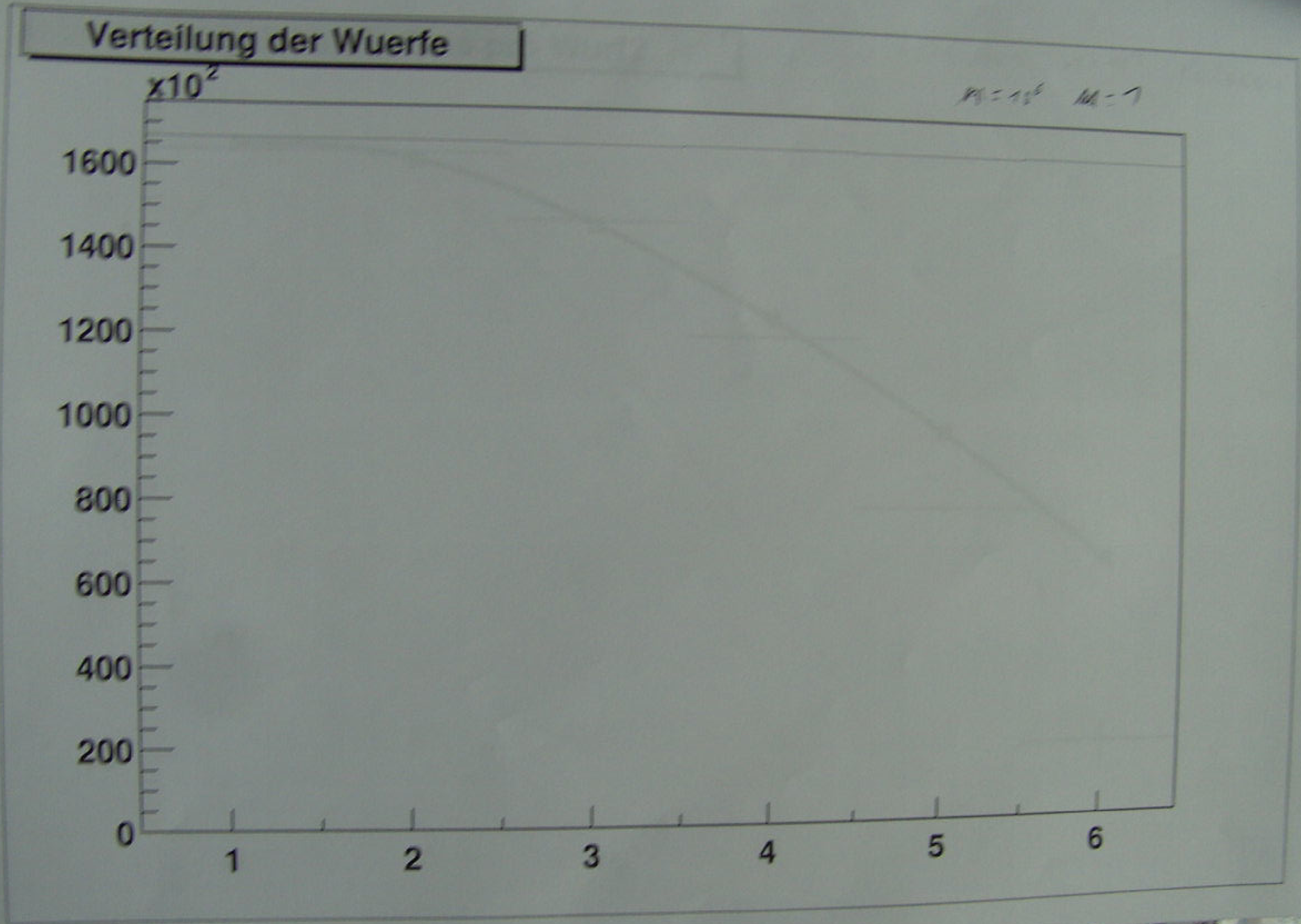
$\frac{\chi^2}{F} = \frac{30{,}8211}{3} = 10{,}2737$

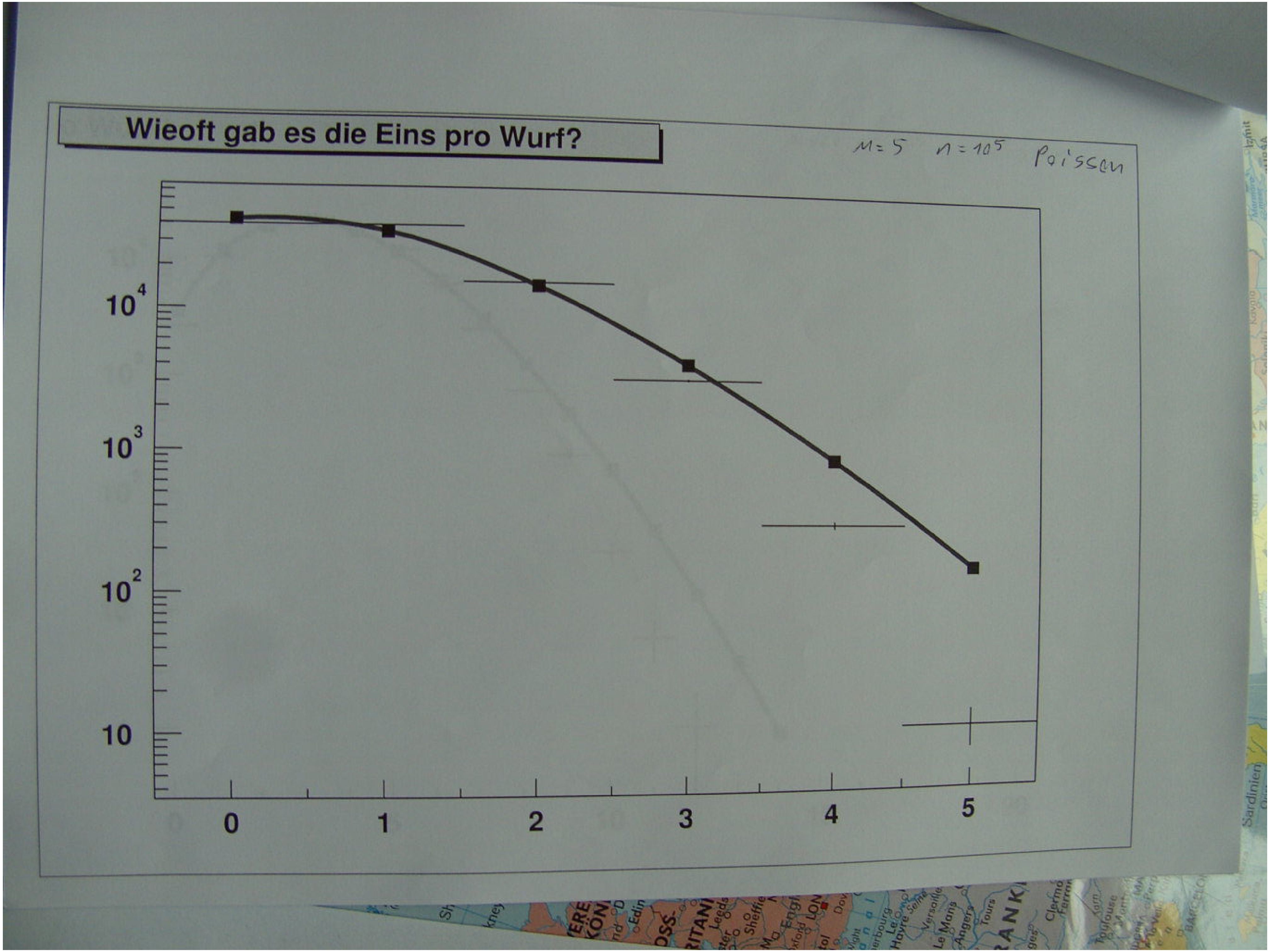
Der Quotient kann nun nicht mehr ungefähr auf 1 gebracht werden, da das Histogram nun nicht mehr einer Gauß-funktion ähnelt (Krümmung an Spitze zu stark).

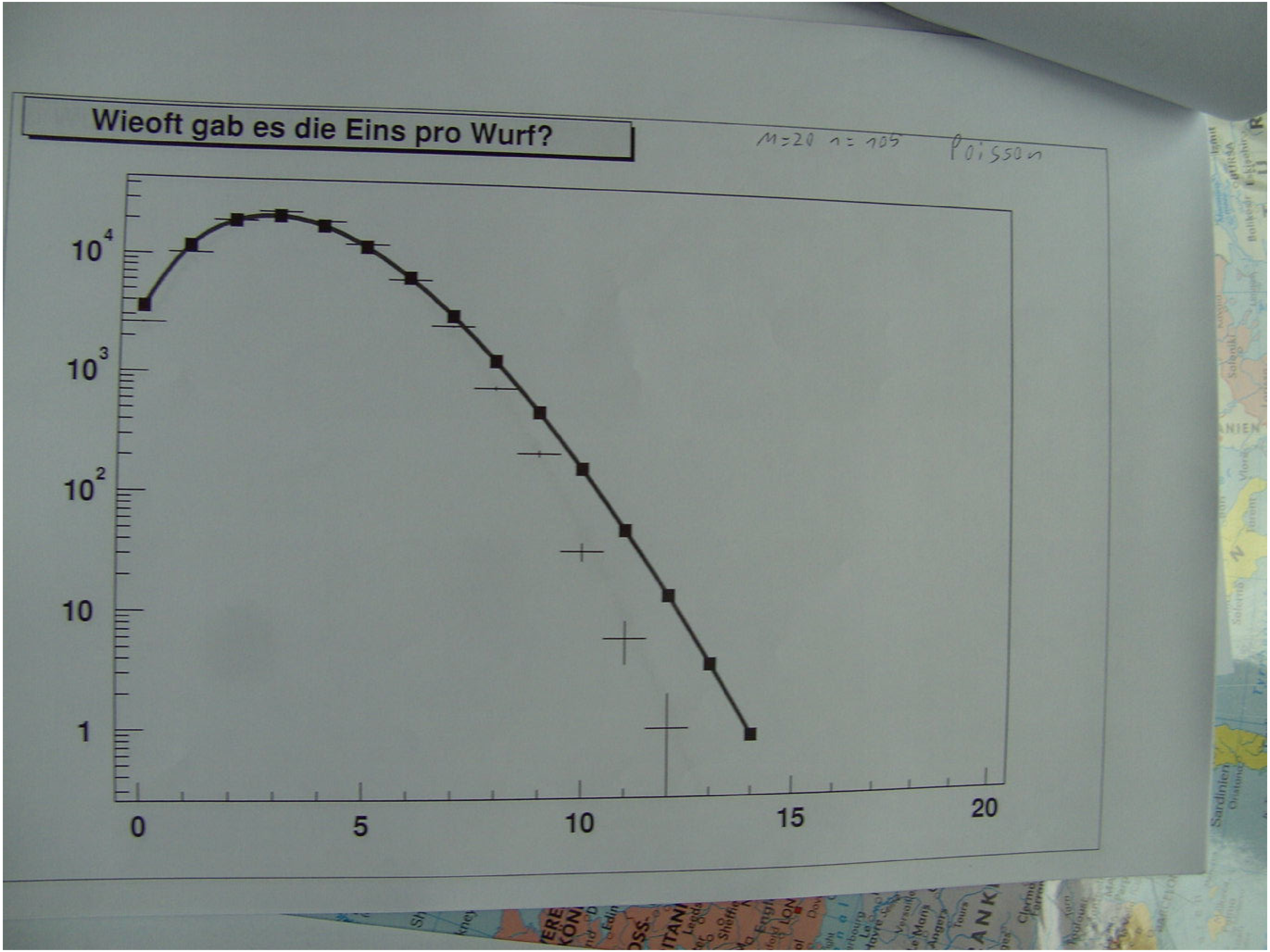


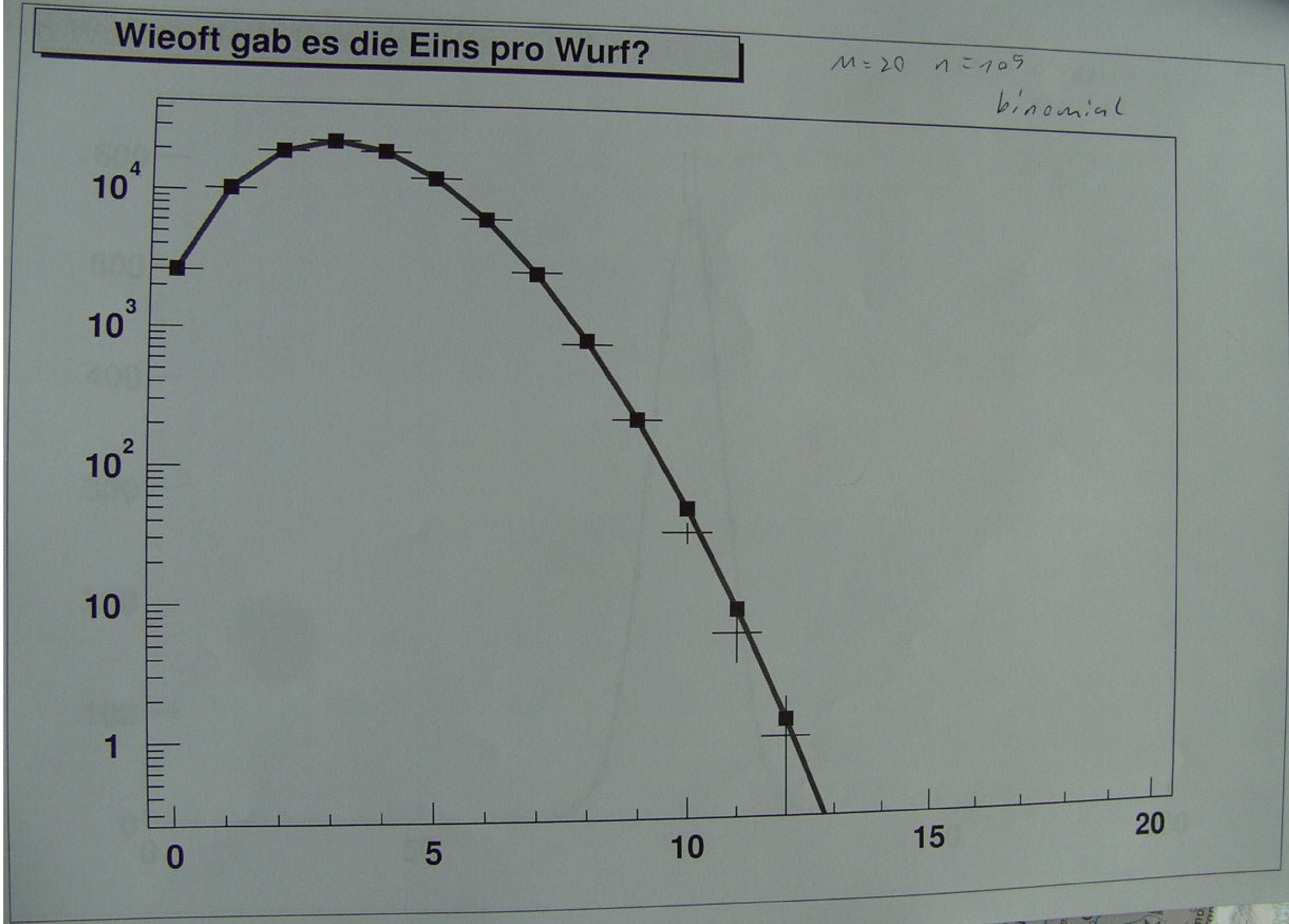
Versuch 1A
Teil 1 2)
doppeltlogarithmische
Darstellung
log(σ(x))
log(N)
0
-1
-2
-3
1
2
3
4
5
6

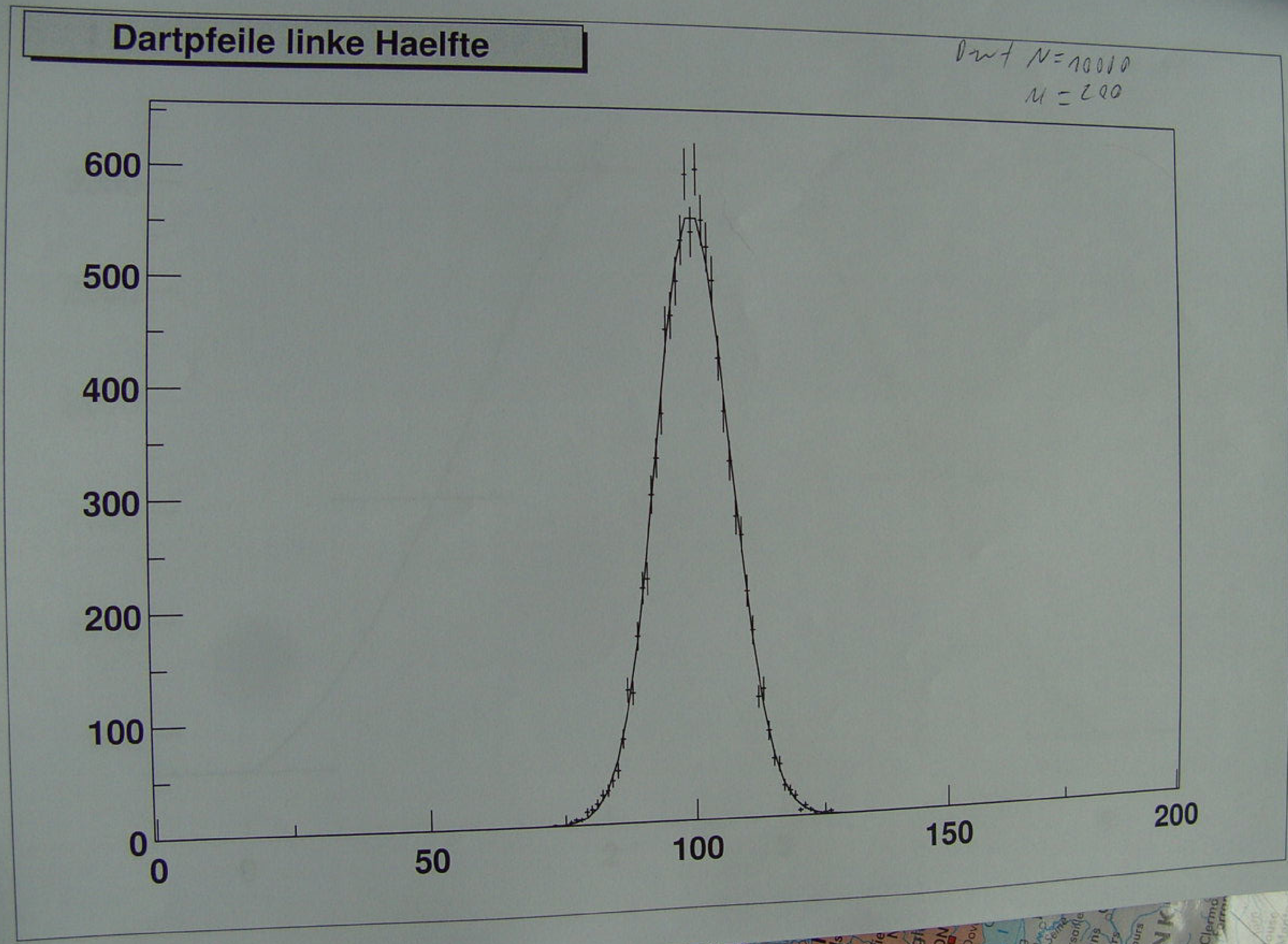

Verteilung der Wuerfe
M=1 n=100
25
20
15
10
5
0
1
2
3
4
5
6

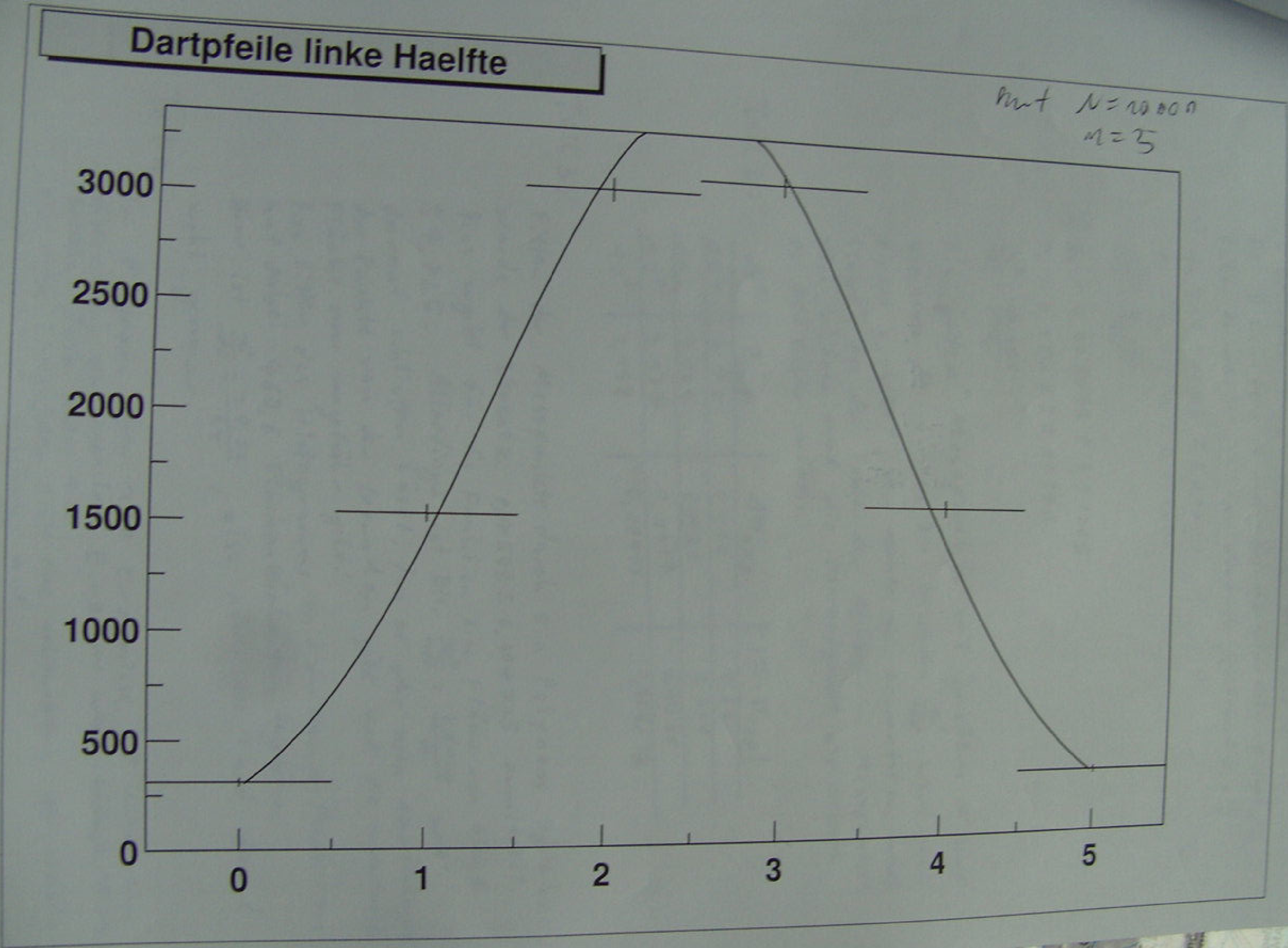

Verteilung der Wuerfe
x10^2
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
1
2
3
4
5
6


Wieoft gab es die Eins pro Wurf?
M=5 n=10^5 Poisson
10^4
10^3
10^2
10
0
1
2
3
4
5


Wieoft gab es die Eins pro Wurf?
M=20 n=10^5 Poisson
10^4
10^3
10^2
10
1
0
5
10
15
20


Wieoft gab es die Eins pro Wurf?
M=20 n=10⁵
binomial
10^4
10^3
10^2
10
1
0
5
10
15
20


Dartpfeile linke Haelfte
Dart N=10000
n=200
600
500
400
300
200
100
0
0
50
100
150
200



Dartpfeile linke Haelfte
Mit N=10000
n=5
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0
1
2
3
4
5

Julian Bergmann Matr. Nr. 1012877 Gruppe 5

Versuch 1B

Teil 1: Man führe einen linearen Fit bei verschiedenen Fehlern der Einzelwerte durch

Teil 2: Man bestimme mit der Monte-Carlo-Methode die Fläche eines Kreises und π.

Teil 3: Man wende dies auf eine beliebige Funktion an.

Teil 4: Durch eine Überhöhung in einem Histogramm soll ein bezielte Punkt einer Wand beim Dartspiel ermittelt werden

Versuchsdurchführung:

Teil 1: 1) Eine bestimmte Anzahl von Würfeln (zwischen 1 und 20) pro Wurf wird geworfen und die Anzahl der 1en gezählt. Dabei sollen 3 Punkte mit kleinem M und großer Wurfanzahl, sowie 3 Punkte mit großem M (Anzahl Würfel) und kleiner Wurfanzahl bestimmt werden (Punkt: (M | 1en)). Die Messpunkte sollen durch eine Gerade gefittet werden, deren Parameter ~~bestimmt~~ geschätzt werden sollen.

2) Das Programm fittet und gibt die Parameter aus.

3) Die 3 Messpunkte mit kleinem N und großem M werden durch 3 Messpunkte mit großem N und kleinem M ersetzt. Der Fit wird wiederholt und das Ergebnis interpretiert.

Teil 2: Das Program simuliert das Werfen von je 100 Pfeilen in 10^3, 10^4 und 10^5 Würfen und notiert die Anzahl der Pfeile, die innerhalb eines Kreises liegen. Die Trefferwahrscheinlichkeit ist homogen. Durch den Zusammenhang $\frac{N}{N_{int}} = \frac{4r^2}{\pi r^2} \Rightarrow \pi = 4 \cdot \frac{N_{int}}{N}$ kann nun auch π bestimmt werden (N_{int}: Treffer im Kreis).

Teil 3: Auf die selbe Weise soll die Fläche unter einer Funktion bestimmt werden. Hierbei soll auch Histogramm mit 100 Zufallszahlen in je 1000 Simulationen durch eine Gauß-funktion gefittet werden.

Teil 4: Ein auf einen bestimmten Punkt zielender Spieler und ein Spieler mit homogener Trefferwahrscheinlichkeit spielen Dart. Man betrachte das Histogramm von 100 Ereignissen und steigere diese um Faktor 10, bis eine Überhöhung sichtbar ist. Daran kann man den bezielten Punkt erkennen. Das Histogramm soll gefittet und mit dem ersten verglichen werden, sowie Mittelwerte und Standardabweichung notiert werden.

Messungen / Rechnung:

Teil 1: 1) Bei Laplace-Würfeln tritt die 1 bei 6 Würfen 1 mal durchschnittlich auf.
Analog tritt die 1 bei einem Wurf mit 6 Würfeln 1 mal durchschnittlich auf.
Bei 0 Würfeln 0 mal, bei 12 Würfeln 2 mal.
Daher erwarte ich im Versuch $p_0 = 0$ und $p_1 = \frac{1}{6}$.

2) $p_0 = -0,00245 \pm 0,01697$

$p_1 = 0,1725 \pm 0,008806$

$\frac{\chi^2}{ndf} = \frac{2,362}{4}$

3) $p_0 = 0,008673 \pm 0,01208$

$p_1 = 0,1627 \pm 0,00346$

$\frac{\chi^2}{ndf} = \frac{4,188}{4}$

Die „guten" Messpunkte mit großem N und kleinem M führen zu besseren $\frac{\chi^2}{ndf}$-Wert und einem p_1-Wert, der näher am erwarteten Wert liegt, da der Fehler der einzelnen Messpunkte viel kleiner und die Genauigkeit der Gerade so präziser wird.

Teil 2:

N	π_{exp}	$\Delta\pi_{exp}$	$\lvert\pi - \pi_{exp}\rvert$
100	3,12	0,312	0,02
10^3	3,108	0,0982	0,336
10^4	3,138	0,0314	0,0036
10^5	3,141	0,00993	0,000593

Teil 3:

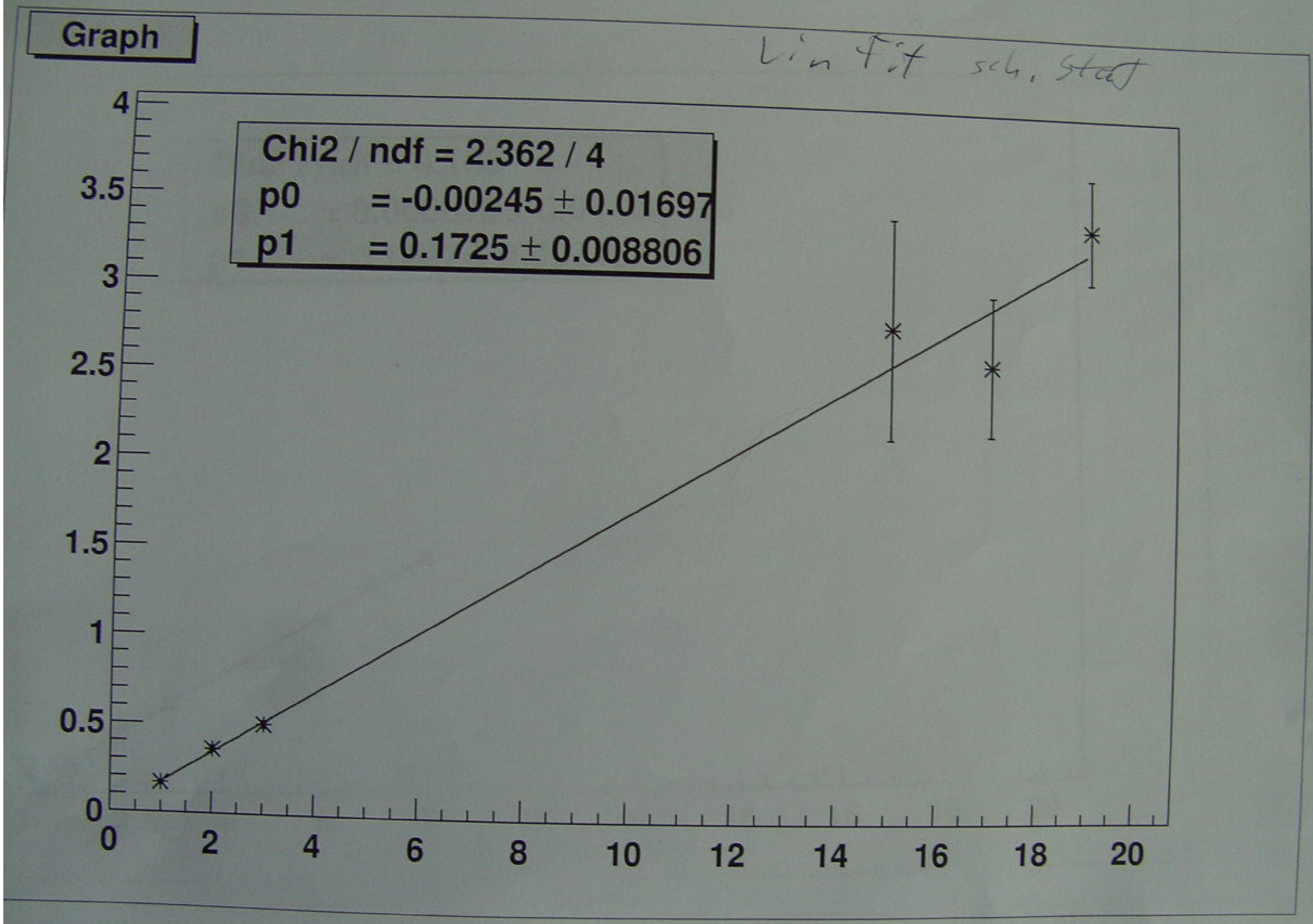
Fitten der Messpunkte durch ein Polynom 1. Grades wurde der Versatz $0,4508 \pm 0,004725$ ermittelt. Dies ergibt für die Funktion eine Fläche von $450,8 \pm 4,725$. Allerdings ist hier $\frac{\chi^2}{ndf} = \frac{0,8194}{4}$, was darauf schließen lässt, dass es sehr hohe Abweichungen der Punkte von der Geraden gibt und die errechnete Fläche nur ungefähr gilt.
Das Fitten des Histogramms mit der Gauß-Funktion hat dabei: 460,6 Flächeneinheiten ergeben.
Hier ist $\frac{\chi^2}{ndf} = \frac{28,22}{34}$, also näher an 1 und damit wohl genauer.

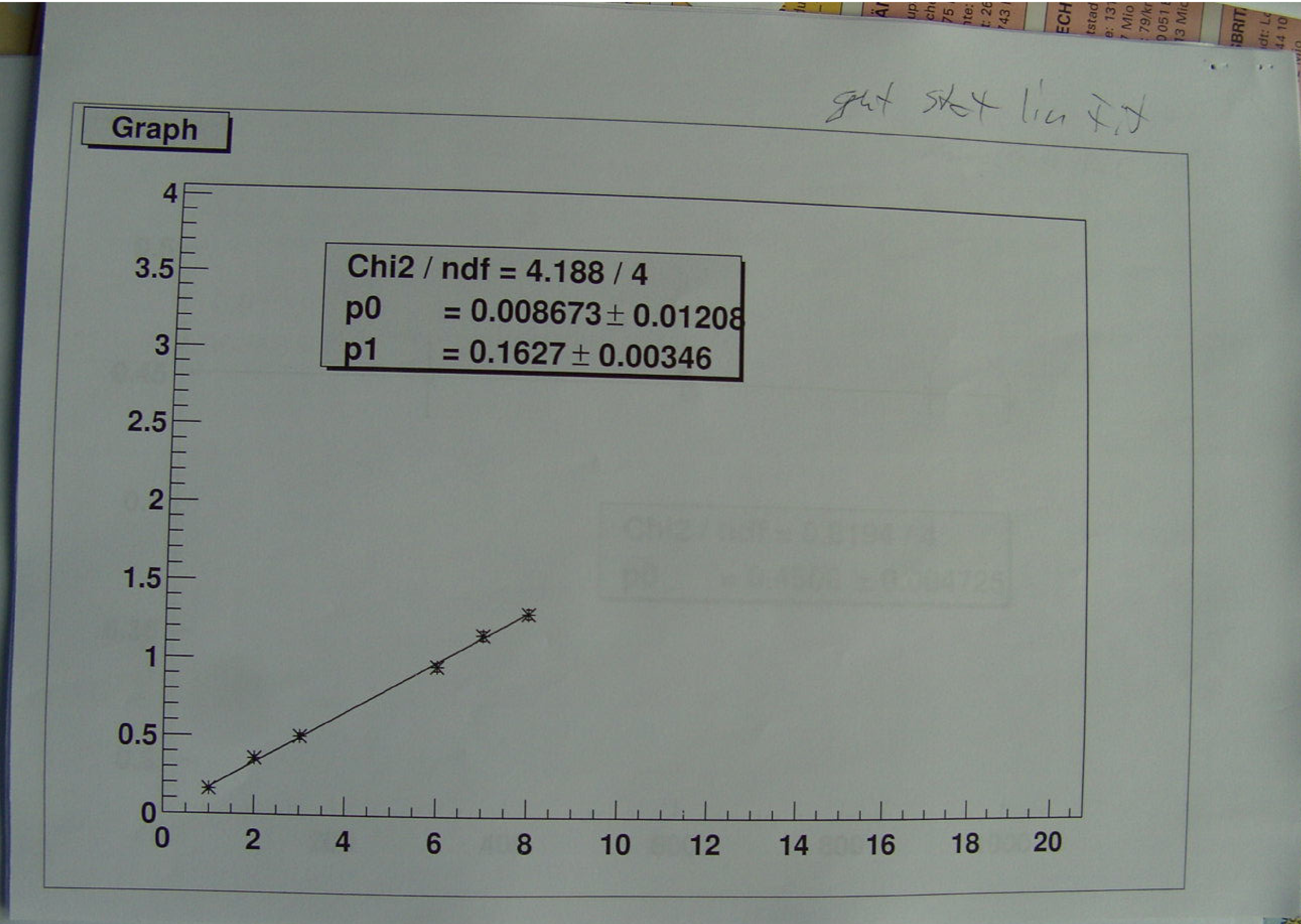
Teil 4:

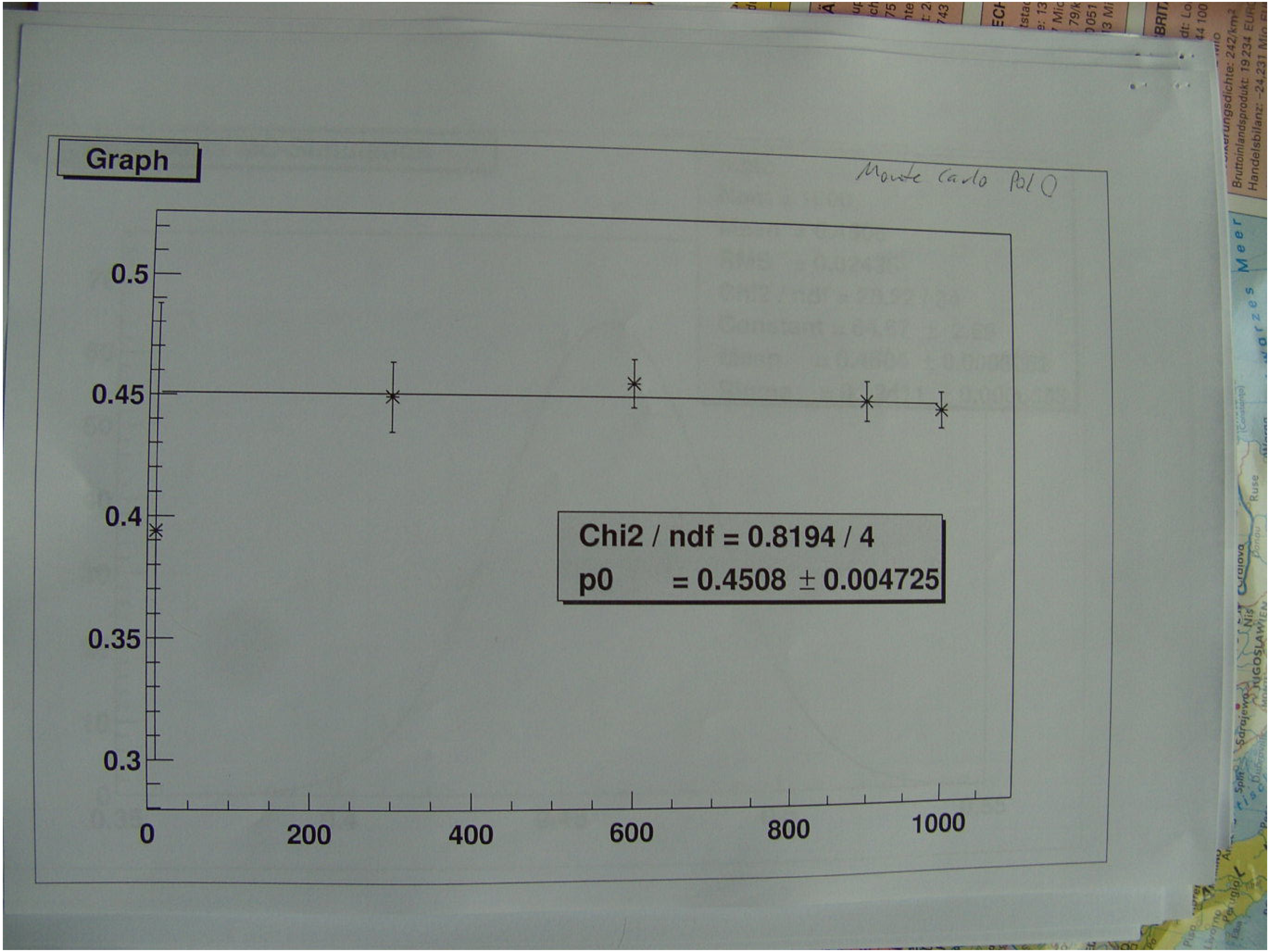
Im Diagram über 100 Ereignisse ist kaum eine Überhöhung zu beobachten. Einzelne Werte schlagen etwas stärker nach oben aus.
Ab 1000 Ereignissen tritt eine erkennbare, bei 100000 eine deutliche Überhöhung auf.

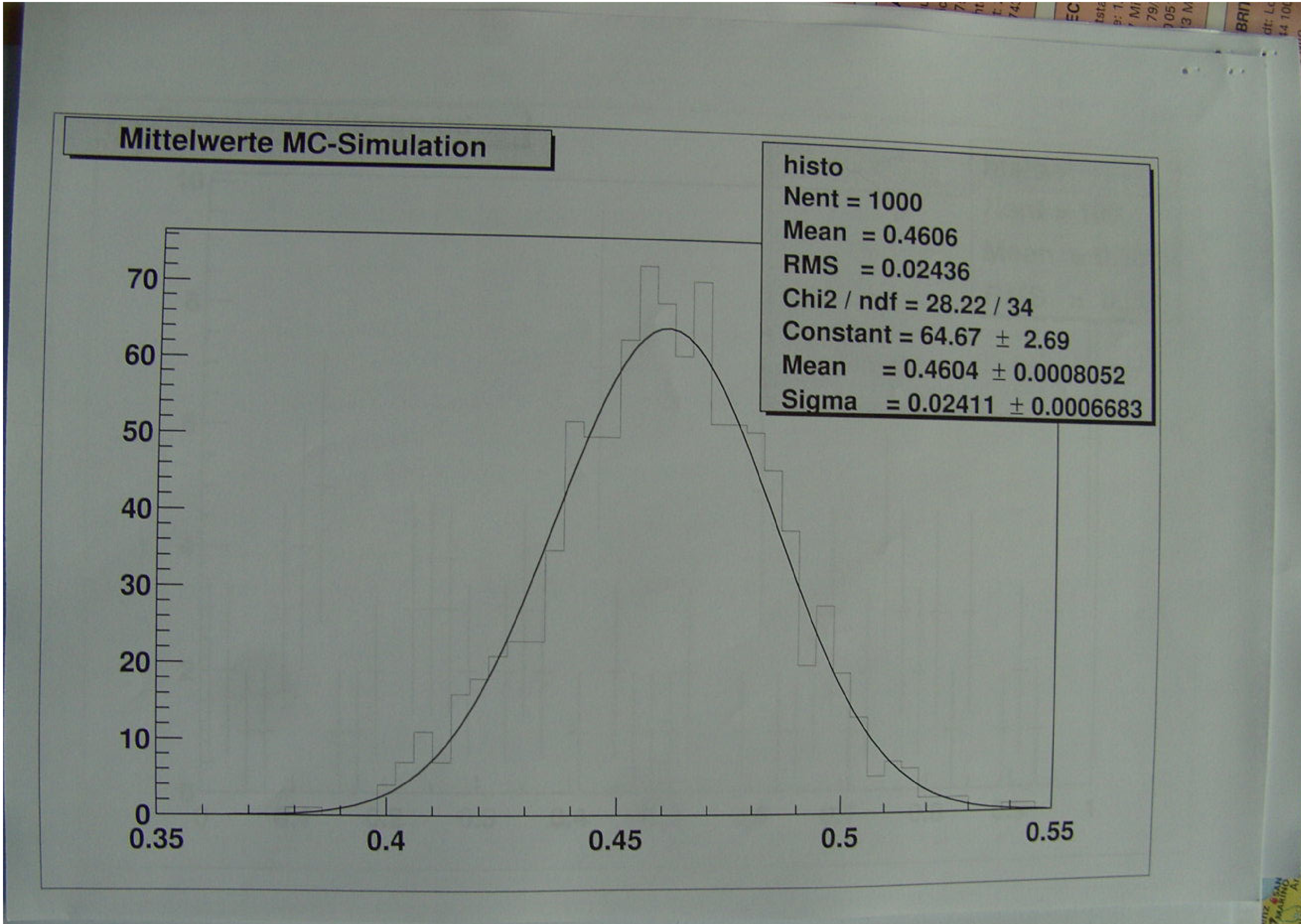
Dabei ist der durch den Gauß-Funktion-Fit ermittelte Mittelwert 0,5009 ± 0,001323 und die zugehörige Standardabweichung 0,03013 ± 0,001335.

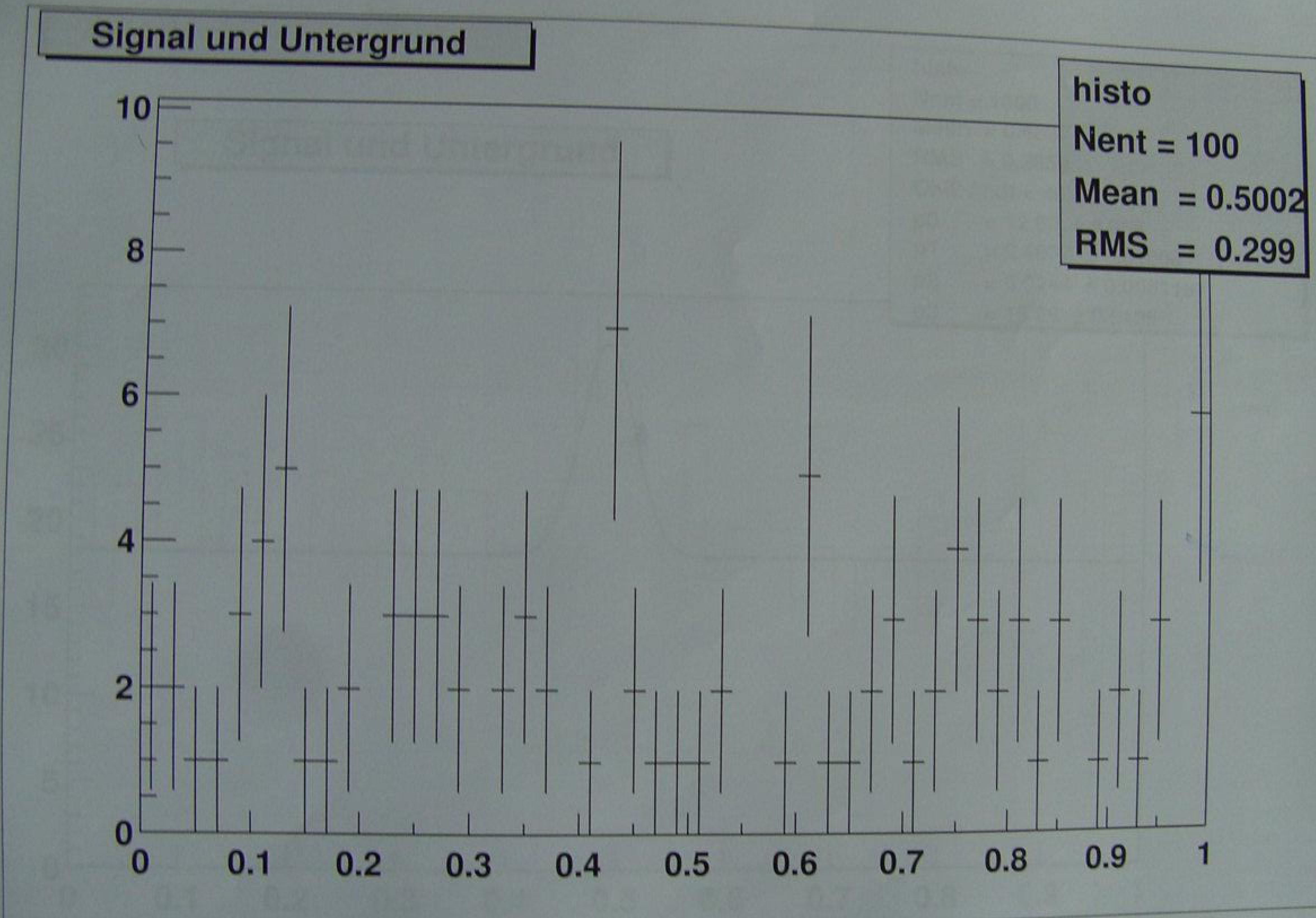
Bei 100 Ereignissen überlagern sich die Wahrscheinlichkeiten der beiden Spieler noch zu stark, sodass keine Überhöhung an einer bestimmten Stelle sichtbar ist. Es gibt zwar einen Einzelwert bei 0,45, der etwas ~~[illegible]~~ höher ausschlägt, allerdings gibt es noch 3 weitere, die nur geringfügig niedriger sind und über das ganze Spektrum verteilt liegen.
Bei 100000 Ereignissen kann an der Histogrammform bereits der Gaußartige Verlauf erkannt werden und eine deutliche Überhöhung über einen konstanten Untergrund ist erkennbar.

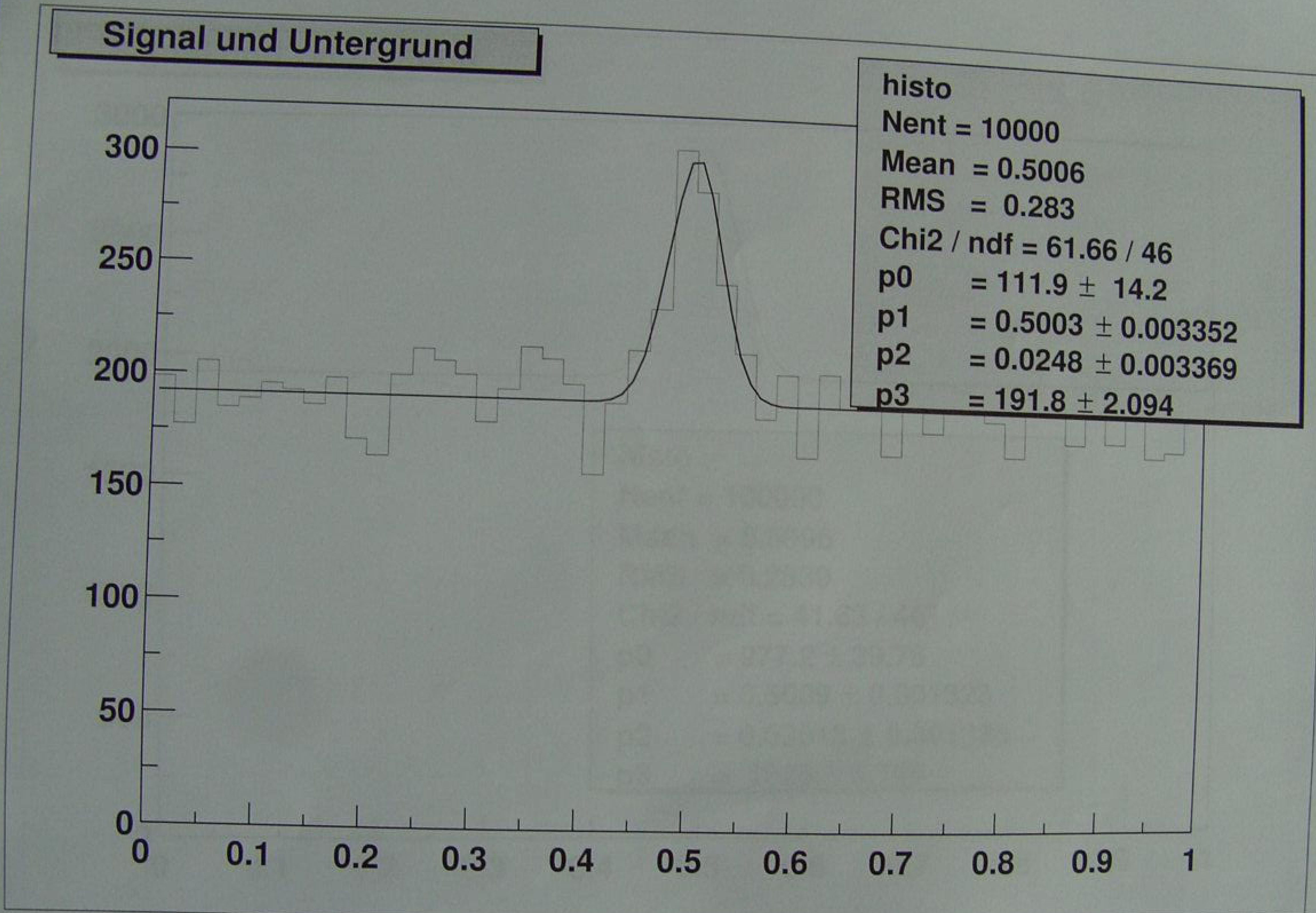

Graph
Lin Fit sch. stat
Chi2 / ndf = 2.362 / 4
p0 = -0.00245 ± 0.01697
p1 = 0.1725 ± 0.008806
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

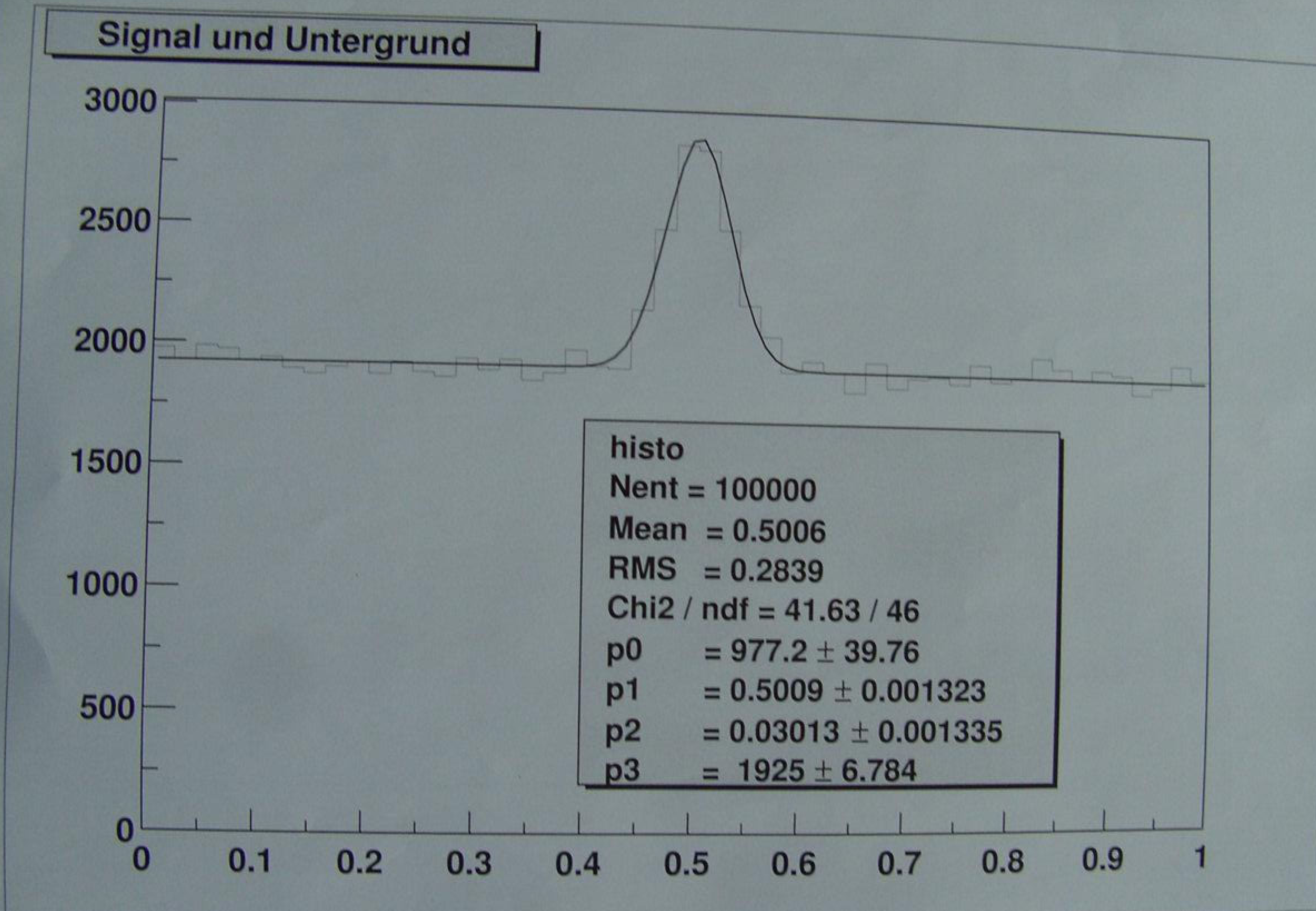

gut stat lin Fit
Graph
Chi2 / ndf = 4.188 / 4
p0 = 0.008673 ± 0.01208
p1 = 0.1627 ± 0.00346
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

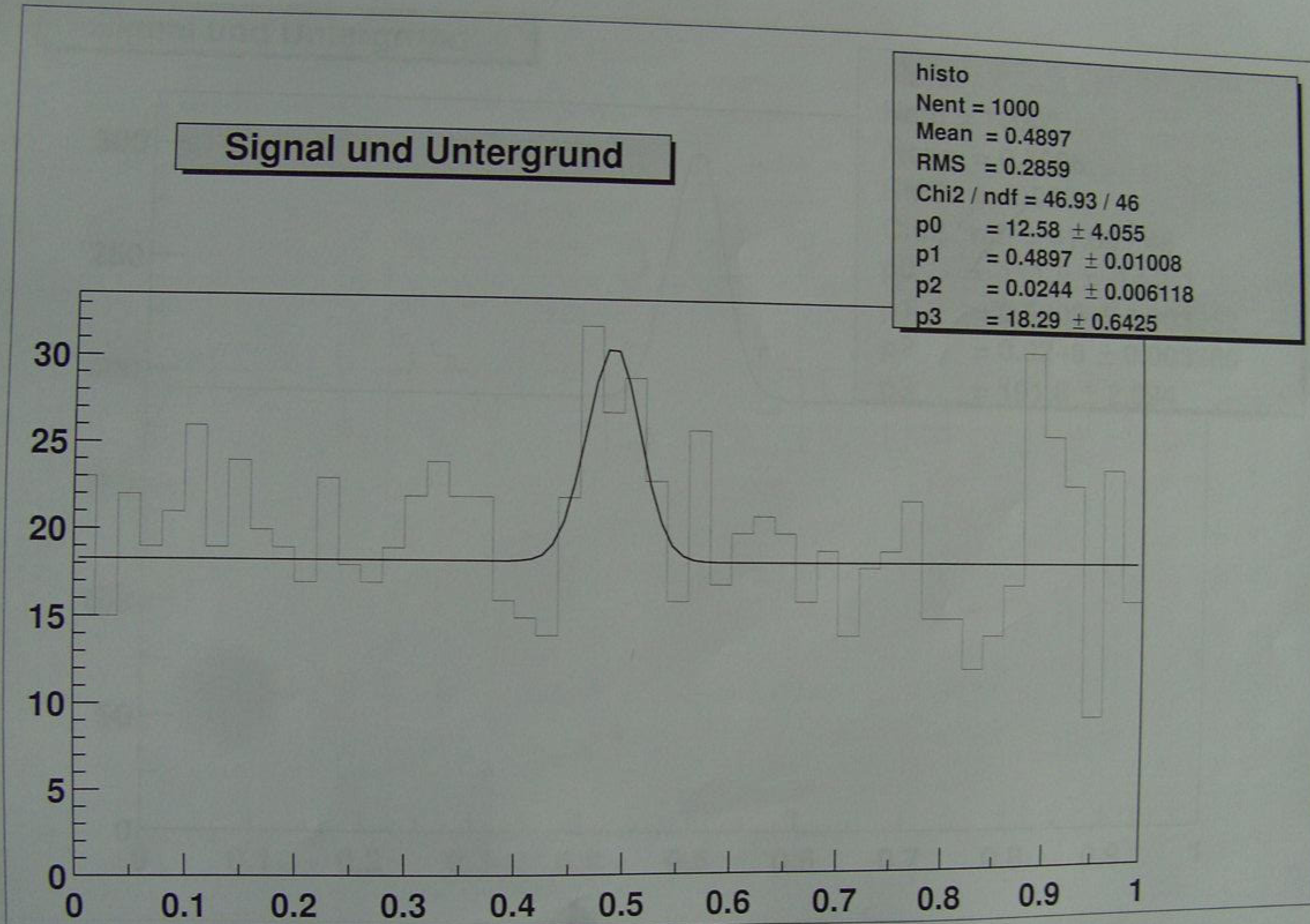

Graph
Monte Carlo Pol 0
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0
200
400
600
800
1000
Chi2 / ndf = 0.8194 / 4
p0 = 0.4508 ± 0.004725


Mittelwerte MC-Simulation
histo
Nent = 1000
Mean = 0.4606
RMS = 0.02436
Chi2 / ndf = 28.22 / 34
Constant = 64.67 ± 2.69
Mean = 0.4604 ± 0.0008052
Sigma = 0.02411 ± 0.0006683
70
60
50
40
30
20
10
0
0.35
0.4
0.45
0.5
0.55


Signal und Untergrund
histo
Nent = 100
Mean = 0.5002
RMS = 0.299
0
2
4
6
8
10
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


Signal und Untergrund
histo
Nent = 10000
Mean = 0.5006
RMS = 0.283
Chi2 / ndf = 61.66 / 46
p0 = 111.9 ± 14.2
p1 = 0.5003 ± 0.003352
p2 = 0.0248 ± 0.003369
p3 = 191.8 ± 2.094
0
50
100
150
200
250
300
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


Signal und Untergrund
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
histo
Nent = 100000
Mean = 0.5006
RMS = 0.2839
Chi2 / ndf = 41.63 / 46
p0 = 977.2 ± 39.76
p1 = 0.5009 ± 0.001323
p2 = 0.03013 ± 0.001335
p3 = 1925 ± 6.784


Signal und Untergrund
histo
Nent = 1000
Mean = 0.4897
RMS = 0.2859
Chi2 / ndf = 46.93 / 46
p0 = 12.58 ± 4.055
p1 = 0.4897 ± 0.01008
p2 = 0.0244 ± 0.006118
p3 = 18.29 ± 0.6425
30
25
20
15
10
5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1