

1 Übungsblatt von Analysis 2 zum Mittwoch, den 21.4.2010

1.1

a) Kreis: $\gamma \in [0, 2\pi] \rightarrow r(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi))} d\varphi = \int_0^{2\pi} r d\varphi = 2r\pi$$

b) Schraubenlinie: $t \in [0, 2\pi] \rightarrow (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), \frac{h}{2\pi}t)$

$$L(t) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (\frac{h}{2\pi})^2} dt = 2\pi \sqrt{r^2 + (\frac{h}{2\pi})^2}$$

c) Zykloïdbogen: $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow r(\varphi - \sin(\varphi), 1 - \cos(\varphi))$

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2((1 - \cos(\varphi))^2 + \sin^2(\varphi))} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} r \sqrt{1 - 2\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} d\varphi = \int_0^{2\pi} r \sqrt{2 - 2\cos(\varphi)} d\varphi = \int_0^{2\pi} r \sqrt{-4\cos^2(\frac{\varphi}{2})} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} 2r \sin(\frac{\varphi}{2}) d\varphi = [4r\cos(\frac{\varphi}{2})]_0^{2\pi} = 8r \end{aligned}$$

d) logarithmische Spirale: $t \in [0, \infty] \rightarrow e^{-\alpha t}(\cos(wt), \sin(wt))$

$$\begin{aligned} L(t) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \sqrt{w^2(\sin^2(wt) + \cos^2(wt))e^{-2\alpha t} + \alpha^2 e^{-2\alpha t}(\cos^2(wt) + \sin^2(wt))} dt \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \sqrt{w^2 e^{-2\alpha t} + \alpha^2 e^{-2\alpha t}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-\alpha t} \sqrt{w^2 + \alpha^2} = \sqrt{w^2 + \alpha^2} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} [\frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha t}]_0^R \\ &= \sqrt{w^2 + \alpha^2} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} (\frac{e^{-\alpha R}}{-\alpha} + \frac{1}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{w^2 + \alpha^2} \end{aligned}$$

1.2

Ellipse: $y(t) = (a \cdot \cos(t), b \cdot \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$

$$L(y) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt$$

$$4aE(k) = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2(t)} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(t) + b^2 \sin^2(t)} dt$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1 - \sin^2(t)) + b^2 \sin^2(t)} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} dt$$

In einem der durch die Halbachsen gebildeten Viertel der Ellipse können bei der Berechnung des Bogens a und b vertauscht werden, da der Bogen dabei gleich bleibt.

$$4aE(k) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 \cos^2(t) + a^2 \sin^2(t)} dt$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt = L(t)$$

Für die Näherungsformel für kleine k benutze man die ersten 4 Terme der Taylorreihenentwicklung an der Stelle 0:

$$L = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-k^2 - \sin^2(t))^n dt = 4a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t) dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t) dt = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{4(2n-3)!}{2^{2n} n! (n-2)!}$$

$$\Rightarrow L = 2a\pi \cdot \left(1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4 - \frac{6}{256}k^6 - \frac{175}{16384}k^8 - \dots\right)$$

$$\Rightarrow L \approx \pi \left(\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\right)$$

1.3

a) Konvergenz:

$\int x^3 e^{-x^2} dx$ wird von $\int x^3 e^{-|x|} dx$ eingeschlossen. Letzteres kann nach 3 partiellen Integrationen auf $[-e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)]$ gebracht werden. Der Grenzwert dieser Stammfunktion nach $+\infty$ und nach $-\infty$ geht gegen 0, da „e-Funktion schlägt alles tot“. Somit konvergiert auch das ursprüngliche Integral $\int x^3 e^{-x^2} dx$.

Flächenberechnung:

Da für $F(x) = x^3 e^{-x^2}$ gilt $F(-x) = (-x)^3 e^{-(-x)^2} = -x^3 e^{-x^2} = -F(x)$, ist F punktsymmetrisch zum Ursprung. Damit heben sich die Flächen links der y-Achse und rechts davon durch alternierende Vorzeichen auf bei unterer Grenze $-R$ und oberer Grenze R .

Also $\int_{-R}^R x^3 e^{-x^2} dx = 0$. Also auch $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x^3 e^{-x^2} dx = 0$

$$\text{b) } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{1}{3+x^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{\arctan(\frac{x}{\sqrt{3}})}{\sqrt{3}} \right]_0^R = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} dx$$

Substitution: $u = \sin(x)$, $dx = \frac{1}{\cos(x)} du$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\sin(0)}^{\sin(\frac{\pi}{3})} \frac{1}{1-u^2} du &= [-0,5 \ln(\frac{u-1}{u+1})]_0^{0,5\sqrt{3}} = -\ln \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{\sqrt{\frac{3}{4}-1}} \right) + \frac{\ln(-1)}{2} \\ &= -\ln(\sqrt{3}-2) + \ln(i) + \frac{\ln(-1)}{2} = -\ln(2-\sqrt{3}) - \ln(-1) + 2\ln(i) = -\ln(2-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

1.4

Konvergenz:

Problem: Bei $t \rightarrow 0$ (unterer Grenze) bei $t^{x-1}e^{-t}$ tritt ein Pol auf.

Da jedoch $t^{x-1}e^{-t} < t^{x-1}$ und t^{x-1} auf beschränkten Intervallen positiven Intervallen und $x > 0$ integrierbar ist, ist der Pol an dieser Stelle kein Problem für die Konvergenz.

Problem: Bei $t \rightarrow \infty$ (oberer Grenze) ist Konvergenz nicht sofort klar.

Da jedoch $t^{x-1}e^{-t} < t^{-2}$ für hinreichend große t ist, da die e-funktion sehr schnell abfällt, ist die Funktion auf für große t konvergent.

Damit ist das Integral konvergent!

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R t^x e^{-t} dt \\ &= \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} [-t^{x-1}e^{-t}]_0^R}_0 + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R x t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x)\end{aligned}$$

$$\Gamma(1) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R t^0 e^{-t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} [-e^{-t}]_0^R = 1$$

nach $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ folgt, dass

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2) \cdots 1 = n!$$