

2 Hinweis zu Mathematik für Physiker II zum Mittwoch, den 28.4.2010

Sei X ein Vektorraum

Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit

(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, x \in X$ $\|x - y\|$ Abstand x nach y .

(N2) $\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(N3) $\forall x, y \in X$ gilt $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Aufgabe 1 !)

heißt Norm auf X .

ohne N1 \rightarrow Seminorm

Bsp: $x = \mathbb{R}^2, \|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

$\|x\| = \|(x_1, x_2)\| = |x_1|$

Beh. $\|\cdot\|$ ist eine Seminorm

$$\|x - y\| - \|x\| \leq \|y\| \Rightarrow \|-x\| = |-1| \cdot \|x\| = \|x\|$$

2)

st. Funktion, Teilmenge & Seminorm (eing) \rightarrow ganze Norm

$$0 = \int_a^b f(x) dx$$

$$a) f \neq 0, \int_a^b |f| = 0$$

Riemann-Integral (Treppenfunktion!)

b) Punkt nicht stetig, Grenzwert (0 oder 2)

zZ: (N1) gilt.

Bew: Seien $x, y \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$

zZ: (N2), (N3):

$$\|\lambda x\| = \|(\lambda x_1, \lambda x_2)\| = |\lambda x_1| = |\lambda| |x_1| = |\lambda| \|x\| \Rightarrow (N2)$$

$$\|x - y\| = \|(x_1 - y_1, x_2 - y_2)\| = |x_1 - y_1| \leq |x_1| + |y_1| = \|x\| + \|y\|$$

\Rightarrow (N3) gilt

$\Rightarrow \|\cdot\|$ ist Semiraum

Zz: (N1) gilt nicht:

es gilt: $\|0\| = |0| = 0$

$$0 = \|x\| - \|(x_1, x_2)\| = |x_1| \Leftrightarrow x_1 = 0$$

D.h. $\|(0, 1)\| = |0| = 0$

$x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2} \text{ euklidische Norm}$$

$$\|x\|_2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Beh. $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

$$\|x\| = \|(x_1, x_2, x_3)\| := 2|x_2| + \sqrt{x_1^2 + x_3^2} = 2|x_2| + \|(x_1, x_3)\|_2$$

Satz 1.8: Alle Normen sind auf \mathbb{R}^n äquivalent

d.h. sind $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ Normen, dann gibt es $c_1, c_2 > 0$ mit

$$c_1 \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_1 \leq c_2 \|\cdot\|$$

3)

Bsp: Bestimme $c_0 := \|\cdot\|_2 \leq c \leq \|\cdot\|_4$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\|x\|_4 = \sqrt[4]{\sum_{i=1}^n x_i^4}$$

$$\|x\|_4 = \dots \geq \sqrt[4]{x_j^4} = |x_j|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|x_i\|_4^2}$$

$$\sqrt{(n\|x\|_4^2)} = \sqrt{(n)}\|x\|_4 =: c = c(n)$$

4)

Knobeln

5)

$U \subseteq \mathbb{R}$

U heißt offen, wenn $\forall x \in U \exists r > 0 : B(x; r) \subseteq U$

$[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht offen, denn angenommen $[a, b]$ wäre offen, dann gibt es $r > 0$ mit $B(a; r) \subseteq [a, b]$

Es ist für $x := a - \frac{r}{2} < a$ $|x - a| = |a - \frac{r}{2} - a| = \frac{r}{2} < r$

D.h. $x \notin [a, b]$ und $x \in B(a; r)$. Widerspruch!

(a, b) offen, denn $x \in (a, b)$

$$r := \min\{x - a, b - x\}$$

$$\text{zZ: } B(x; r) \subseteq [a, b]$$

Dann ist für $y \in B(x; r)$

$$\Rightarrow y - a = y - x - (a - x) = x - a - (x - y) > |x - a| - (x - a) = 0$$

$$(x - y) \leq |x - y| \leq r \leq x - a$$

$$b - y = b - x - (y - x) > b - x - (b - x) = 0$$

$$(x - y) \leq |x - y| \leq r \leq b - x$$

$$\Rightarrow a < y < b$$

$$y \in (a, b)$$

$$\Rightarrow B(x; r) \subseteq (a, b)$$

$$\Rightarrow (a, b) \text{ offen}$$

$$|(-1)(x - y)| = |(-1)||x - y| = |x - y|$$

Zusatz:

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n, r > 0$

Beh: $\overline{B(x_0; r)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\} := B$

Bew: $x \in B(x_0; r) \Rightarrow x \in B$

sei $x_i : \|x - x_0\| = r$

sei $\delta > 0$

$$y = x_0 + (1 - \frac{\delta}{2r})(x - x_0)$$

$$y \in B(x; \delta) \subseteq B(x_0; r)$$

„ \leq “ sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$

$$\delta = \|x - x_0\| \Rightarrow B(x; \delta) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus B$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus B \subseteq \mathbb{R}^n \setminus B(x_0, r)$$