2 Übung zu Informatik zum 29.4.2010 Blatt 2

2.1

a) Da die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist, die Relation aber nur für Mengenpaare gilt, die sich nicht enthalten, ist die leere Menge in keinem Paar aus R enthalten. Also Aussage richtig.

b) $2^M \times 2^M = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, 1), ..., (1, \emptyset), ...\}$ Somit enthält $2^M \times 2^M$ auch Paare, die nicht aus R sind, da Sie einander enthalten. R^* soll aber die Vereinigung aller Paare von Zahlen aus der Menge M sein, die aus R sind. Also Aussage falsch.

c) Da $R^0 = (X, X)|X \in 2^M$ würde X sich natürlich selbst enthalten und so nicht aus R sein. Somit ist R^0 nicht in R enthalten. Auch würde sich ein Transitives Verhalten, dass $XRY \wedge YRX \rightarrow XRX$ wieder auf R^0 reduzieren, wonach $R^* = R^+ = R^1$ sein muss, sofern man dabei alle Definitionen auslässt, die die Definition der Relation untergraben könnten.
Somit wäre $R^* = R^+$, sofern man von einer nicht-transitiven, nicht-reflexiven Relation ausgeht, die damit auch nur 1 Ebene besäße.

d) Nimmt man die Definition aus c) zugrunde, nämlich dass R nur diejenigen R^i beinhaltet, die die Relation nicht widersprüchlich werden lassen würden, so kann man hier argumentieren, dass $\{\emptyset, \emptyset\}$ und $\{M, M\}$ eigentlich über R^0 relativiert werden müssen, dieses aber gar nicht mehr in R^* enthalten ist, da es für diese Relation gar nicht gelten kann. Dementsprechend verändert sich durch das Entfernen dieser Elemente das Ergebnis aus c) nicht.

Julian Bergmann
Florian Greiner
Markus Streck

2.2

$=^1$ $(\overline{c} \wedge a \vee b \wedge (\overline{a} \vee c)) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$
Mit Distributivgesetz folgt: $(\overline{c} \wedge a \vee ((b \wedge \overline{a}) \vee (b \wedge c))) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$
Mit Konvention Priorität $\wedge$ höher als $\vee$ folgt: $(\overline{c} \wedge a \vee b \wedge \overline{a} \vee b \wedge c) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$

$=^2$ Da $... \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$ vorraussetzt, dass für eine positive ausgabe des Gesamtterms b oder c 0 ist, kann der Oder-Verknüpfte Term $b \wedge c$ als überflüssig weggelassen werden.
Es folt also $(\overline{c} \wedge a \vee b \wedge \overline{a}) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$

$=^3$ Wir erweitern den Term $b \wedge \overline{a}$ um die immer positive Aussage $\wedge(c \vee \overline{c})$.
Dadurch folgt: $(\overline{c} \wedge a \vee b \wedge \overline{a} \wedge (c \vee \overline{c})) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$.
Es folgt mit dem Distributivgesetz $(\overline{c} \wedge a \vee b \wedge \overline{a} \wedge \overline{c} \vee b \wedge \overline{a} \wedge c) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$.
Wieder mit dem Distributivgesetz folgt $(\overline{c} \wedge (a \vee b \wedge \overline{a}) \vee b \wedge \overline{a} \wedge c) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$
was durch die höhere Priorität von $\wedge$ auch umgeordnet werden kann: $(\overline{c} \wedge (a \vee b \wedge \overline{a}) \vee c \wedge b \wedge \overline{a}) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$.

$=^4$ Durch das Distributivgesetz folgt $(\underbrace{\overline{c} \wedge (a \vee b \wedge \overline{a})}_{A} \vee \underbrace{c \wedge b \wedge \overline{a}}_{B}) \wedge (\underbrace{\overline{b} \vee \overline{c}}_{C})$
$\Rightarrow (A \vee B) \wedge C = C \wedge A \vee C \wedge B \Rightarrow \overline{c} \wedge (a \vee b \wedge \overline{a}) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c}) \vee c \wedge b \wedge \overline{a} \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$
$\Rightarrow \overline{c} \wedge (b \vee a) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c}) \vee c \wedge b \wedge \overline{a} \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$
da $a \vee b \wedge \overline{a} = (a \vee b) \wedge (\underbrace{a \vee \overline{a}}_{1}) = (a \vee b)$

$=^5$ Wegen dem Absorptionsgesetz folgt für $\overline{c} \wedge (\overline{b} \vee \overline{c}) = \overline{c}$:
$\overline{c} \wedge (b \vee a) \vee c \wedge b \wedge \overline{a} \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$
Nach Morgan folgt für $\overline{\overline{c \wedge b}} = \overline{c} \vee \overline{b} \quad \Rightarrow \quad \overline{c} \wedge (b \vee a) \vee \overline{\overline{c} \vee \overline{b}} \wedge \overline{a} \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$

$=^6$ Da bei $(\overline{\overline{c} \vee \overline{b}}) \wedge (\overline{c} \vee \overline{b}) = 0$ folgt $\overline{c} \wedge (b \vee a)$

2.3 Zusatz

Um das Spiel zu gewinnen, muss man dem gegnerischen Spieler im letzten Zug genau 1 Streichholz liegen lassen.
Dazu benötigt man selber zwischen 2 und 5 Streichhölzer.
Um zwischen 2 und 5 Hölzer zu erhalten muss man im vergangenen Zug 6 Hölzer liegen gelassen haben.
Damit man aber nicht selber 6 Hölzchen erhält, also verlieren wird, muss man im vorherigen Zug 11 Hölzer liegen gelassen haben.
Der gegnerische Spieler wird die Hölzer auf 7 bis 10 reduzieren können, was wir in jedem Fall auf 6 reduzieren können und müssn, um zu gewinnen.
Für 11 liegen gelassene Hölzer müssen wir von den 15 4 entnehmen.
Machen also beide Spieler keine Fehler, gewinnt immer der, der angefangen hat, sofern er 4 Hölzer zu Beginn zieht.