2 Übung zu Informatik zum 29.4.2010 Blatt 2

2.1

a) Da die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist, die Relation aber nur für Mengenpaare gilt, die sich nicht enthalten, ist die leere Menge in keinem Paar aus R enthalten. Also Aussage richtig.

b) $2^M \times 2^M = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, 1), ..., (1, \emptyset), ...\}$ Somit enthält $2^M \times 2^M$ auch Paare, die nicht aus R sind, da Sie einander enthalten. R^* soll aber die Vereinigung aller Paare von Zahlen aus der Menge M sein, die aus R sind. Also Aussage falsch.

c) Da $R^0 = (X, X)|X \in 2^M$ würde X sich natürlich selbst enthalten und so nicht aus R sein. Somit ist R^0 nicht in R enthalten. Auch würde sich ein Transitives Verhalten, dass $XRY \wedge YRX \rightarrow XRX$ wieder auf R^0 reduzieren, wonach $R^* = R^+ = R^1$ sein muss, sofern man dabei alle Definitionen auslässt, die die Definition der Relation untergraben könnten.
Somit wäre $R^* = R^+$, sofern man von einer nicht-transitiven, nicht-reflexiven Relation ausgeht, die damit auch nur 1 Ebene besäße.

d) Nimmt man die Definition aus c) zugrunde, nämlich dass R nur diejenigen R^i beinhaltet, die die Relation nicht widersprüchlich werden lassen würden, so kann man hier argumentieren, dass $\{\emptyset, \emptyset\}$ und $\{M, M\}$ eigentlich über R^0 relativiert werden müssen, dieses aber gar nicht mehr in R^* enthalten ist, da es für diese Relation gar nicht gelten kann. Dementsprechend verändert sich durch das Entfernen dieser Elemente das Ergebnis aus c) nicht.

2.2

$=^1$ $(\overline{c} \wedge a \vee b \wedge (\overline{a} \vee c)) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$
Mit Distributivgesetz folgt: $(\overline{c} \wedge a \vee ((b \wedge \overline{a}) \vee (b \wedge c))) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$
Mit Konvention Priorität $\wedge$ höher als $\vee$ folgt: $(\overline{c} \wedge a \vee b \wedge \overline{a} \vee b \wedge c) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$

$=^2$ Da ... $\wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$ vorraussetzt, dass für eine positive ausgabe des Gesamtterms b oder c 0 ist, kann der Oder-Verknüpfte Term $b \wedge c$ als überflüssig weggelassen werden. Es folt also $(\overline{c} \wedge a \vee b \wedge \overline{a}) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$

$=^3$ Wir erweitern den Term $b \wedge \overline{a}$ um die immer positive Aussage $\wedge(c \vee \overline{c})$.
Dadurch folgt: $(\overline{c} \wedge a \vee b \wedge \overline{a} \wedge (c \vee \overline{c})) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$.
Es folgt mit dem Distributivgesetz $(\overline{c} \wedge a \vee b \wedge \overline{a} \wedge \overline{c} \vee b \wedge \overline{a} \wedge c) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$.
Wieder mit dem Distributivgesetz folgt $(\overline{c} \wedge (a \vee b \wedge \overline{a}) \vee b \wedge \overline{a} \wedge c) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$
was durch die höhere Priorität von $\wedge$ auch umgeordnet werden kann: $(\overline{c} \wedge (a \vee b \wedge \overline{a}) \vee c \wedge b \wedge \overline{a}) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$.

$=^4$ Durch das Distributivgesetz folgt $(\underbrace{\overline{c} \wedge (a \vee b \wedge \overline{a})}_{A} \vee \underbrace{c \wedge b \wedge \overline{a}}_{B}) \wedge (\underbrace{\overline{b} \vee \overline{c}}_{C})$

$\Rightarrow (A \vee B) \wedge C = C \wedge A \vee C \wedge B \Rightarrow \overline{c} \wedge (a \vee b \wedge \overline{a}) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c}) \vee c \wedge b \wedge \overline{a} \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$
$\Rightarrow \overline{c} \wedge (b \vee a) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c}) \vee c \wedge b \wedge \overline{a} \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$
da $a \vee b \wedge \overline{a} = (a \vee b) \wedge (\underbrace{a \vee \overline{a}}_{1}) = (a \vee b)$

$=^5$ Wegen dem Absorptionsgesetz folgt für $\overline{c} \wedge (\overline{b} \vee \overline{c}) = \overline{c}$:
$\overline{c} \wedge (b \vee a) \vee c \wedge b \wedge \overline{a} \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$
Nach Morgan folgt für $\overline{\overline{c \wedge b}} = \overline{\overline{c} \vee \overline{b}} \quad \Rightarrow \quad \overline{c} \wedge (b \vee a) \vee \overline{\overline{c} \vee \overline{b}} \wedge \overline{a} \wedge (\overline{b} \vee \overline{c})$

$=^6$ Da bei $(\overline{\overline{c} \vee \overline{b}}) \wedge (\overline{c} \vee \overline{b}) = 0$ folgt $\overline{c} \wedge (b \vee a)$

2.3 Zusatz

Um das Spiel zu gewinnen, muss man dem gegnerischen Spieler im letzten Zug genau 1 Streichholz liegen lassen.
Dazu benötigt man selber zwischen 2 und 5 Streichhölzer.
Um zwischen 2 und 5 Hölzer zu erhalten muss man im vergangenen Zug 6 Hölzer liegen gelassen haben.
Damit man aber nicht selber 6 Hölzchen erhält, also verlieren wird, muss man im vorherigen Zug 11 Hölzer liegen gelassen haben.
Der gegnerische Spieler wird die Hölzer auf 7 bis 10 reduzieren können, was wir in jedem Fall auf 6 reduzieren können und müssn, um zu gewinnen.
Für 11 liegen gelassene Hölzer müssen wir von den 15 4 entnehmen.
Machen also beide Spieler keine Fehler, gewinnt immer der, der angefangen hat, sofern er 4 Hölzer zu Beginn zieht.