

2 Übungsblatt von Analysis 2 zum Mittwoch, den 28.4.2010

2.1

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| = \left| \|x + y - y\| - \|y\| \right| \leq \begin{cases} \|x - y\| + \|y\| - \|y\| = \|x - y\| \\ \|x + y\| + \|y\| - \|y\| = \|x + y\| \end{cases}$$

2.2

$$\text{a) (ii) } \|\lambda f(x)\| = \int_a^b |\lambda f(x)| dx = \int_a^b |\lambda| |f(x)| dx = |\lambda| \int_a^b |f(x)| dx = |\lambda| \|f(x)\|$$

$$\text{(iii) } \|f(x) + g(x)\| = \int_a^b |f(x) + g(x)| dx \leq \int_a^b |f(x)| + |g(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx + \int_a^b |g(x)| dx = \|f(x)\| + \|g(x)\|$$

$$\neg \text{(i) } f(x) := \begin{cases} 1 & , x = 1 \\ 0 & , x \neq 1 \end{cases} \\ \Rightarrow \|f(x)\| = 0 \not\equiv f(x) = 0$$

Damit ist $\|\cdot\|$ eine Seminorm auf $R[a, b]$.

Da (i) nicht erfüllt ist, ist $\|\cdot\|$ keine Norm.

b) Ist $\|\cdot\|$ auf stetige Funktionen auf $[a, b]$ eingeschränkt, so gilt:

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) \neq 0 \iff \exists x_0 \in \mathbb{R} : |f(x_0)| > 0 \iff \exists x_0 \in \mathbb{R} \forall \varepsilon, \delta > 0 : \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\delta} |f(x)| dx > 0$$

\iff

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \int_a^b |f(x)| dx = 0 \iff f(x)|_{[a,b]} = 0$$

Da also $\|f(x)\|$ im Intervall $[a, b]$ nur dann 0 ist, wenn $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ immer 0 ist, gilt nun auch das erste Kriterium für Normen.

Die Einschränkung auf die stetigen Funktionen macht $\|\cdot\|$ zu einer Norm.

2.3

- $\|\cdot\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} (|x_i|) \leq \|\cdot\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, da die Summe das maximale Element ohne Vorzeichen mit einschließt und gegebenenfalls weitere Beträge der anderen Elemente addiert.

$$\Rightarrow c_1 \geq 1, \text{ also z.B. } c_1 = 1$$

- $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \geq \sqrt{|x_i|^2} = |x_i|$

$$\|\cdot\|_1 = \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\leq \|\cdot\|_2} \leq \sum_{i=1}^n \|\cdot\|_2 = n \|\cdot\|_2$$

$$\Rightarrow c_2 \geq n, \text{ also z.B. } c_2 = n$$

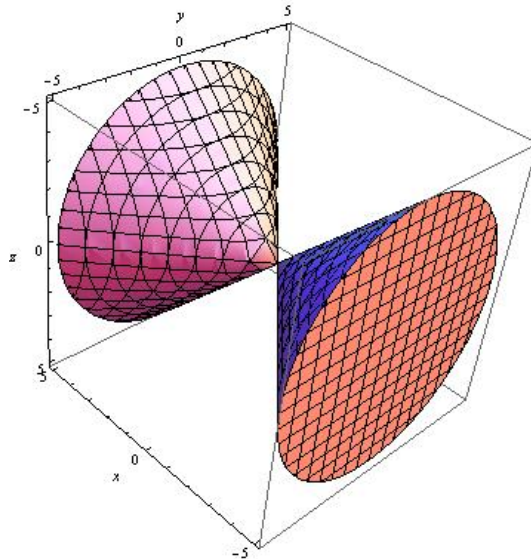
- $\|\cdot\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} (|x_i|) \geq |x_i|$

$$\|\cdot\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|^2}_{\leq \|\cdot\|_\infty}} \leq \sqrt{n \|\cdot\|_\infty^2} = \sqrt{n} \|\cdot\|_\infty$$

$$\Rightarrow c_3 \geq \sqrt{n}, \text{ also z.B. } c_3 = \sqrt{n}$$

2.4

a)



b) Inneres:

$$\overset{\circ}{M} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in K \mid -1 < x_0 < 1, x_0^2 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\}$$

Für den Teil von $-1 < x_0 < 1$ ist $\overset{\circ}{M} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in K \mid x_0^2 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\}$ das innere von M , da es für alle Zahlen r mit $r = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, r < x_0^2$ durch die dichte der reellen Zahlen ein größeres r_0 existiert, sodass $r < r_0 < x_0^2$.

Im Randbereich von $x_0 \in \{-1, 1\}$ gilt: für jeden Punkt, der von x_0 r weit entfernt ist existiert durch die dichte der Reellen Zahlen ein r_0 , welches kleiner ist als r .

Dadurch ist jeder Punkt in $\overset{\circ}{M}$ nur von Punkten aus $\overset{\circ}{M}$ umgeben und damit das innere von M .

Rand:

$$\partial M = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \mid x_0 \in \{-1, 1\}, x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\}$$

Für den Rand muss gelten: $\forall x \in \partial M \forall r \in \mathbb{R} \mid B_{\|\cdot\|}(x, r) \cap M \neq \emptyset \wedge B_{\|\cdot\|}(x, r) \cap \mathbb{R}^4 \setminus M \neq \emptyset$

Für alle Elemente x aus ∂M gilt, dass $x_0^2 \geq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \wedge x_0^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Da M so definiert wurde, dass $x_0^2 \geq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, gilt für alle von ∂M benachbarten Elemente mit $x_0^2 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, dass Sie in M liegen und dass für alle $x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ gilt $\forall \varepsilon > 0 : x_0^2 + \varepsilon > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, sodass eine Menge dieser Punkte Teilmenge des Inneren von M wäre.

Außerdem gilt für alle $x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 : \forall \varepsilon > 0 : x_0^2 - \varepsilon < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, sodass eine Menge dieser Punkte Teilmenge von $\mathbb{R}^4 \setminus M$ wäre.

Dmit hat jede Umgebung aller Elemente von ∂M gleichzeitig Elemente von M und von $\mathbb{R}^4 \setminus M$, wodurch dies der Rand ist.

Abschluss:

$$\overline{M} = \partial M \cap \overset{\circ}{M} = M, \text{ da } M \text{ abgeschlossene Menge.}$$

2.5

a) Die offene Kugel $B_{\|\cdot\|}(x_0; r)$ ist definiert als $\{x \in \mathbb{R}^n \mid r > \|x - x_0\|\}$

Damit diese Menge offen ist, müssen alle ihre Punkte von Punkten der Menge umgeben sein. Da die Reellen Zahlen dicht sind, gilt:

$$\forall x \in B_{\|\cdot\|}(x_0; r) \exists \delta > 0 \mid \{x \mid \delta = \|x - x_0\|\} \subset B_{\|\cdot\|}(x_0; r).$$

Daher sind innerhalb einer notwendig kleinen Umgebung um jeden Punkt innerhalb der Menge M alle Punkte auch innerhalb M .

b) Der Abschluss ist definiert als $\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall r > 0 : B_{\|\cdot\|}(x, r) \cap M \neq \emptyset\}$

\overline{M} ist abgeschlossen, wenn $\mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$ offen.

$$\mathbb{R}^n \setminus \overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists r > 0 : B_{\|\cdot\|}(x, r) \cap \overline{M} = \emptyset\}.$$

Da \mathbb{R} dicht gilt: $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{M} \forall r \in \{r_0 | B_{||,||}(x, r) \cap \overline{M} = \emptyset\} \exists \delta > 0 | B_{||,||}(x, r + \delta) = \emptyset$.

Also $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{M} \exists r_x | B_{||,||}(x, r_x) = \emptyset$

und damit ist $\mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$ offen und dementsprechend \overline{M} geschlossen.

- c) (ii) \Rightarrow (i) siehe b)
 (i) \Rightarrow (ii) Wenn gilt $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus M \exists r_x > 0 | B_{||,||}(x, r_x) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$, also $B_{||,||}(x, r_x) \cap M = \emptyset$ (abgeschlossen), so gilt für die Komplementäre Menge die Negation der Bedingung, also $\forall x \in M | \forall r > 0 : B_{||,||} \cap M \neq \emptyset$ (Abschluss)
- (ii) \Leftrightarrow (iii) Für eine Folge (x_n) bedeutet $|x_n - x| \rightarrow 0$, dass diese Folge gegen den Grenzwert x konvergiert. Dies bedeutet dass für jedes $\varepsilon > 0$ ab einem gewissen Index n gilt, dass alle Folgeelemente innerhalb der Menge $B_{||,||}(a, \varepsilon)$ liegen und nur endlich viele Elemente außerhalb.
 Da diese Bedingung für alle Folgen (x_n) gelten sollen, muss es auf für eine Folge aus M gelten, die gegen einen Randpunkt von M konvergieren. Für diese Punkte gilt im Gegensatz zu allen Punkten außerhalb von M , dass die Folgeglieder in der Menge $B_{||,||}(a, \varepsilon) \cap M$ bleiben können, während der Randpunkt der Menge M nur dann Element von M ist, wenn der Rand von M Teilmenge von M ist. Da aber der Abschluss einer Menge $\overline{M} = \partial M \cup \overset{\circ}{M}$ und $\overset{\circ}{M} \subset M$, muss M der Abschluss sein.
- (i) \Leftrightarrow (iii) Für den Fall, dass die Funktionsfolge wie eben beschrieben gegen einen Punkt auf dem Rand von M konvergiert, gilt nur dann wenn der Konvergenzpunkt x zur Menge M gehört, dass die Menge abgeschlossen ist, da wenn der Punkt x auf dem Rand von M zur Menge M gehört, für alle $\varepsilon > 0$ die Menge $D := B_{||,||}(x, \varepsilon)$ gilt, dass $D \cap M \neq \emptyset$ und $D \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset$ ist.
- d) nach b) ist \overline{M} abgeschlossen.
 Also ist nach c) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$