Theorie Tutorium vom 27.4.2010

Eigenschaften der Relativitätstheorie

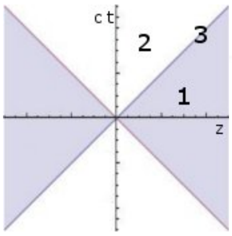
1. Grenzgeschwindigkeit ($v \leq c$)
2. Gleichzeitigkeit systemabh. Begriff
3. Längenkontraktion
4. Zeitdiletation

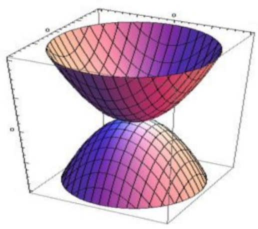
Eigenzeit: $d\tau = \frac{1}{c} ds, ds^2 = (cdt)^2 - d\vec{x}^2 = (cdt')^2 - dx'^2$

Geschwindigkeitsaddition

in $K : \omega$, in $K' : \omega'$
$\omega = \frac{\omega' + v}{1 + \frac{v\omega'}{c^2}}$
für $\omega' = c$ ist ω maximal c. für $\frac{v}{c} \to 0$ ist $\omega' = \omega + v$

Artigkeit





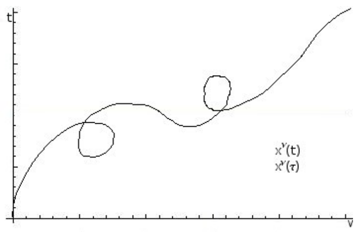
$d^2 = x^2 = x_\mu x^\mu = c^2 t^2 - \vec{x}^2$

1	$d^2 > 0$:	zeitartig
2	$d^2 < 0$:	raumartig
3	$d^2 = 0$:	lichtartig

Beispiel:

Eine Person niest (sendet Signal) zum Zeitpunt t_0 und der Koordinate x_0. Eine zweite Person lässt ein Stück Kreide fallen zum Zeitpunkt t_1 und der Koordinate x_1. benötigt das Licht für die Strecke Δx länger als Δt, so fällt das Stück Kreide bevor die Person 2 weiß, dass Person 1 genießt hat. Dann heißt das Ereignis raumartig. Trifft das Signal zeitgleich mit dem Fallen der Kreide ein, ist das Ereignis lichtartig. Benötigt das Licht weniger Zeit als Δt um Δx zurückzulegen, ist das Ereignis zeitartig.
Daher ist es nur in licht- und zeitartigen Ereignissen möglich, dass sie einander beeinflussen, also kausal zusammenhängen können.
(Dieses Beispiel sollte nicht als alleinige Lernquelle benutzt werden, da unwissentschaftlich!)

Bewegungselemente



Vierergeschwindigkeit: $u^\nu = \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} = \frac{dx^\nu(t)}{dt}\frac{dt}{d\tau}$
$u = \gamma(c, \vec{v})$
Viererimpuls: $p^\nu = m_0 u^\nu$, $p = \gamma m_0 (c, \vec{v}) = m(c, \vec{v})$

Theorie Tutorium vom 3.5.2010

Kurzwiederholung

Vierergeschwindigkeit: $u^\nu = \frac{dx^\nu}{d\tau}$, $\quad u^\nu = \gamma(c, \vec{v})$
Viererbeschleunigung: $p^\nu = m_o u^\nu = \gamma m_0(c, \vec{v}) = m(c, \vec{v})$

nicht relativistische Kraftgleichung

$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = F^\mu$
Erst 3 Komponenten: $F^i = \gamma \frac{d}{dt}(\gamma m_0 v^i) = \gamma K^i$
$\vec{K} = \frac{d}{dt}(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}(t))$
Für $m_0 > 0$ und $v \to c$ folgt also $m \to \infty$
$\vec{K} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} \Rightarrow$ Kaft nicht unbedingt parallel zur Beschleunigung!
$F^0 \sim$ zur Leistung der mechanischen Kraft.
$F^0 = \frac{d}{d\tau}(\gamma m_0 c) = \gamma \vec{K}\frac{\vec{v}}{c} \Rightarrow \vec{K} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{c}(\vec{k}\vec{v})\vec{v}$

Äquivalenz von Masse & Energie

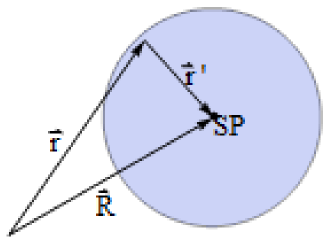
$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2 \equiv E$ (Energie eines freien Teilchens)
Teilchen mit v=0 besitzt Ruheenergie $m_0 c^2$
kin. Energie: $T = E - m_0c^2 = (m - m_0)c^2 \Rightarrow p = (\frac{E}{c}, \vec{v})$, $p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2$, $p^2 = m_0 c^2$

Systeme von Teilchen

$K = 1, ..., N$
$\vec{F}_k = n_k \ddot{\vec{r}}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$
$\vec{F} = \sum\limits_k \vec{F}_k = \frac{d}{dt}\sum\limits_k \vec{p}_k = \frac{d}{dt}\vec{P}$
$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^e \Rightarrow \vec{P}$ konstant, wenn $\vec{F} = 0$ (Impulserhaltung)
$\frac{D\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ (Drehimpulserhaltung) ($\vec{r}_k \times \vec{F}_{kl} = 0$, wenn $\vec{F}_{kl}$ Zentralkraft)
$W = \sum\limits_k \frac{m_k}{2} v_k^2$ (Energieerhaltung)
$\vec{R} = \frac{\sum\limits_k m_k \vec{r}_k}{\sum\limits_k m_k}$, $\vec{V} = \dot{\vec{R}} = \frac{\sum\limits_k m_k \dot{\vec{r}}_k}{M}$ (Schwerpunkt)
$$T = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \sum_k \frac{m_k}{2}\dot{\vec{r}}_k'^2 + \underbrace{\sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k' \dot{\vec{R}}}_{=0 \text{ im SP-System}} \quad \text{(kin. Energie)}$$

2 Körper-System

$N = 2$; $\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$; $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$
$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$; $\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$
Nur innere Kraft: $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) = V(r)$
$F_1 = -\vec{\nabla}_1 V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) = m_1 \vec{r}_1$,
$F_2 = -\vec{\nabla}_2 V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) = m_2 \vec{r}_2$



Theorie Tutorium vom 18.5.2010

Zweikörperproblem

$m\ddot{\vec{r}}_1 + m\ddot{\vec{r}}_2 = M\ddot{\vec{R}} = 0$
$\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = -(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})\vec{\nabla}_r V(r) = -\frac{1}{\mu}\vec{\nabla}_r V(r) = \frac{1}{\mu}\vec{F}'$
$\vec{p} = \mu\vec{r}$, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, $\vec{p} = \frac{m_1}{M}\vec{p}_2 - \frac{m_2}{M}\vec{p}_1$
$\vec{L} = m_1(\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) + m_2(\vec{r}_2 \times \vec{v}_2) = M(\vec{R} \times \vec{V}) + \mu(\vec{r} \times \vec{v})$

Kontinuierliche Systeme von Teilchen

$\rho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV}$, $\sigma = \frac{dM}{dF}$, $\tau = \frac{dM}{dl}$
$M = \int \rho(\vec{r})dV$, $\vec{R} = \frac{1}{M}\int \rho(\vec{r})\vec{r}dV$
$\vec{P} = \int \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})dV$, $\vec{L} = \int \rho(\vec{r})(\vec{r} \times \vec{v})dV$
$\vec{M} = \int \rho(\vec{r})(\vec{r} \times \dot{\vec{v}})dV$

Gravitation bei kontinuierlichen Systemen

$\vec{F}_{1\to 2} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$
$\vec{F} = G\sum\limits_k \frac{m m_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}|^3}(\vec{r}_k - \vec{r}) = F(\vec{r})$ (Teilchen mit Masse m bei $\vec{r}$)
$\vec{F} = Gm\int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3}dV' \equiv mg(\vec{r})$
$V(\vec{r}) = -Gm\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|}dV'$
$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow \vec{g}(\vec{r}) = -\frac{1}{m}\vec{\nabla}V = -\vec{\nabla}\phi$

Bewegung starrer Körper

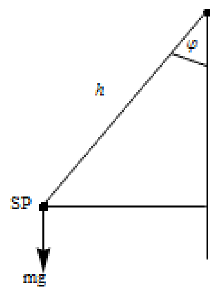
Koordinaten-Nullpunkt auf Drehachse $\Rightarrow$ Drehimpuls in Ri. der Drehachse:
$L_n = \sum\limits_i m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i)\vec{n} = \sum\limits_i m_i(\vec{n} \times \vec{r}_i)\vec{v}_i$
$v_i = d_i\omega$, $\omega = \dot{\vec{\varphi}} \Rightarrow \vec{L} = \sum\limits_i m_i d_i^2\dot{\vec{\varphi}} = I\dot{\vec{\varphi}} = I\vec{\omega}$
$I = \sum\limits_i m_i d_i^2$ Trägheitsmoment der Drheung um die feste z-Achse.
$I = \int \rho(\vec{r})(x^2 + y^2)dV$
$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\ddot{\vec{\varphi}}$
kinet. Energie der Rotation: $T = \frac{1}{2}I\omega^2$

Theorem der prallelen Achsen

I bekannt für Drehung durch SP, Drehung durch parallele Achse $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$
$\Rightarrow$ Steiner'sche Satz: $I' = I + MR^2$
(R: Distanz beider Achsen, I: Trägheitsmoment um Achse durch SP)

Physikalisches Pendel

Drehmoment auf starren Körper im Gravitationsfeld
$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$, äußere Schwerkraft greift am SP an!
$\vec{M} = I\ddot{\vec{\varphi}} = \vec{r} \times \vec{F} = -Mgh\sin(\varphi)\vec{n}$
$\ddot{\vec{\varphi}} = \ddot{\varphi}\vec{n}, \varphi < 0$
$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{Mgh}{I}\sin(\varphi) = 0$ kleine Ausschläge: $\phi \approx \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha)$
$\Rightarrow \omega^2 = \frac{Mgh}{I}$ math. $\omega^2 = \frac{g}{l}$
$l_{eq} = \frac{I}{Mh}$



Theorie Tutorium vom 25.5.2010

Kinetische Energie der Rotation eines starren Körpers

$$T = \sum_k \frac{m_k}{2}\vec{v}_k^2 = \frac{1}{2}\pi\vec{v}^2 + \underbrace{\sum_k m_k \vec{r}_k'(\vec{v}\times\vec{\omega})}_{*} + \frac{1}{2}\sum_k m_k(\vec{\omega}\times\vec{r}_k')^2$$

$* = 0$, Wenn NP von Σ in SP, oder wenn NP von Σ in Pkt. der bei Rotation raumfest.

$\Rightarrow T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\sum_k m_k(\vec{\omega}^2\vec{r}_k'^2 - (\vec{r}_k'\vec{\omega})^2)$

$= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\sum_{ij}\omega_i\omega_j\sum_k m_k[\delta_{ij}\vec{r}_k'^2 - x_i'^k x_j'^k]$

Trägheitstensor $I_{ij} = \sum_k m_k[\delta_{ij}\vec{r}_k'^2 - x_i'^k x_j'^k]$ symm., rell.

$\Rightarrow T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\sum_{ij} I_{ij}\omega_i\omega_j$

$$I = \begin{pmatrix} \sum m(y'^2+z'^2) & -\sum mx'y' & -\sum mx'z' \\ -\sum mx'y' & \sum m(x'^2+z'^2) & -\sum my'z' \\ -\sum mx'z' & -\sum my'z' & \sum m(x'^2+y'^2) \end{pmatrix}$$

Diagonalelemente: Trägheitsmomente für Rot. um die betreffende feste Achse.
Nichtdiagonalelemente Deviationsmomente.

Drehimpils des starren Körpers

NP von $\sum$ in SP$\Rightarrow$ nur Bewegung relativ zum SP für $\vec{L}$ wichtig!

$\vec{L} = \sum_k m_k(\vec{r}_k \times \vec{v}_k) = \sum_k m_k[\vec{I}_k \times (\vec{\omega}\times\vec{r}_k)]$, $\vec{r}_k = \vec{r}_k'$

$\Rightarrow L \vec{=} \sum m(\vec{\omega}\vec{r}^2 - \vec{r}(\vec{r}\vec{\omega}))$

$L_i = \sum_l \omega_l(\sum_k m_k(r^2\delta_{il} - x_i x_l)) = \sum_l I_{il}\omega_l$

$\Rightarrow \vec{L} = \underbrace{I\vec{\omega}}_{Matrixmult.} \quad \Rightarrow \vec{L} \not\parallel \vec{\omega}$

Bestimmung der Hauptträgheitsachsen und -momente.

$\vec{L}||\vec{\omega}$?: Bed $\sum_l I_{il}\omega_l - I_0\omega_i = 0$, $\sum_l(I_{il} - I_0\delta_{il})\omega_l = 0$ (LGS, homogen in ω)

nicht triviale Lösung, wenn $det(I_{il} - I_0\delta_{il}) = 0$

$\Rightarrow I_0$ EW von Trägheitstensor ($3\times 3 \Rightarrow 3$EW $I_0^i \in \mathbb{R}, 3$EV $\vec{\omega}^i$)

Also: $I\vec{\omega}^i = I_0^i\vec{\omega}^i$

$1 \Rightarrow I\vec{\omega}^i = I_0^i\vec{\omega}^i$, $2 \Rightarrow I\vec{\omega}^j = I_0^j\vec{\omega}^j$

$1-2 \Rightarrow \underbrace{\vec{\omega}^j I\vec{\omega}^i I\vec{\omega}^j}_{=0,\ da\ I\ symm.} = (I_0^i - I_0^j)\vec{\omega}^i\vec{\omega}^j$

$\Rightarrow \vec{\omega}^i \perp \vec{\omega}^j \Rightarrow$ EV bilden kart Achsensystem

I_0^i: Hauptträgheitsmomente,$\vec{\omega}^i$:Hauptträgheitsachsen

Diagonalisierung einer Matrix

Bestimmung der EW und EV:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix} = A'$$

$det(A') \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow$ Berechnung von $\alpha_{1,2,3}$

Zur Bestimmung der EV:

$$A'\vec{v}' = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} (a_{11}-\lambda_i)v_x^i + a_{12}v_y^i + a_{13}v_z^i = 0 \\ a_{21}v_x^i + (a_{22}-\lambda_i)v_y^i + a_{23}v_z^i = 0 \\ a_{31}v_x^i + a_{32}v_y^i + (a_{33}-\lambda_i)v_z^i = 0 \end{array} \quad \text{für jeden EW durchrechnen} \Rightarrow \vec{v}^1, \vec{v}^2, \vec{v}^3$$

Theorie Tutorium vom 15.6.2010

Kreisel

1) starrer Körper in einem Pkt festgehalten
2) Körperfestes und Raumgestes System im Nullpunkt zusammen
3) Raumfest: X,Y,Z
4) Körperfest: x,y.z

Bewegungsgleichungen des in einem Pkt. festen Körpers

alg. Bewegungsgl $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

a) $\vec{M} \& \vec{L}$ im Labor-System berechnen $\frac{dLx}{dt} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = Mx$

b) Bewegungsgl. im körperfesten System: $\vec{M} = \frac{\vec{L}}{dt} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + (\vec{\omega} \times \vec{L})$

Rotation$\Rightarrow$ kein Intertialsystem $\vec{L} = \sum_i L_i \vec{e}_i, \quad \vec{L} = \sum_i L_i \vec{e}_i' \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \dot{L}_i \vec{e}_i' + \underbrace{\sum_i L_i \dot{\vec{e}}_i'}_{\vec{\omega} \times \vec{L}}$

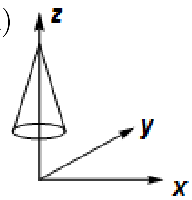
$\Rightarrow M_i = \frac{dL'}{dt} + (\vec{\omega} \times \vec{L})_i$

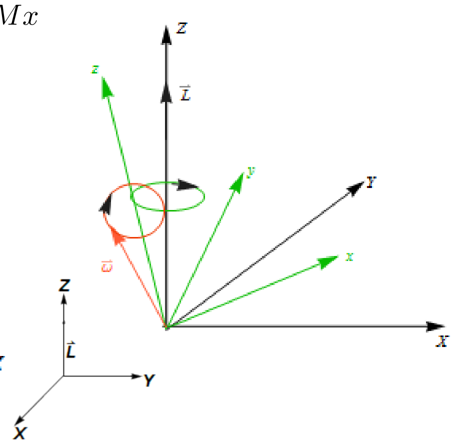
mit Hauptträgheitsachsen: $L_i = I_{ii}\omega_i \Rightarrow I_x \frac{d'}{dt}\omega_x + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) = Mx$

Euler'sche Bezeichnungen:

$(p, q, r) = \vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z); A, B, C \leftrightarrow I_x, I_y, I_z$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{c} A\dot{p} + (C - B)qr = M_x \\ B\dot{q} + (A - C)rp = M_y \\ C\dot{r} + (B - A)pq = M_z \end{array} \right| \text{(Euler'sche Gleichungen)}$$





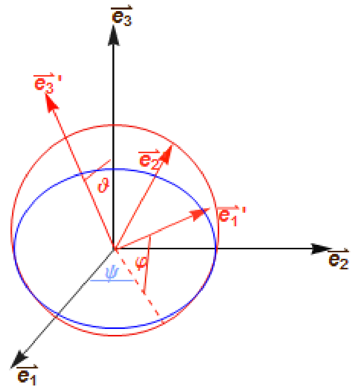
Kräftefreie Bewgung des sym. Kreisels

Sym-Achse: körperfeste z-Ache $\Rightarrow$ A=B
Da Bewegung krätefrei$\Rightarrow$ $\vec{L}$ im Laborsystem onstant
Raumfeste Z-Achse in Drehimpuls $\vec{L}$
$A\dot{p}(C - A)qr = 0, \quad A\dot{q} + (A - C)rp = 0, C\dot{r} = 0$
$\Rightarrow$ r=const, $L_z = Cr = const$ (spezielle EIgenschaft des symm Kreisels. keie allg. Impulserhaltung)

$\Rightarrow A\dot{p} = \left| \begin{array}{c} (A - C)qr \\ B\dot{q} = (C - A)pr \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} A\dot{p} = (A - C)qr \\ A\dot{q} = (C - A)pr \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \dot{p} = A - C/Arq \\ \dot{q} = -\frac{A-C}{A}rp \end{array} \right| mit \oplus \Rightarrow p\dot{p} + q\dot{q} = 0 = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}(p^2 + q^2)$

$\Rightarrow p^2 + q^2 = \omega_\perp^2 = cons, p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2 = const$ (im körperfesten System)
$\vec{\omega}$ präzessiert auf Kegel um z-Achse mit $\tan(\beta) = \frac{\omega_\perp}{\omega}$
$*A^2 \Rightarrow Lx^2 + Ly^2 = A^2(p^2 + q^2) = A^2\omega_\perp^2 = const \Rightarrow \vec{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = const$
L^2 auch im raumfesten System konstant! $*A \Rightarrow Energieerhaltung : A(p^2 + q^2) + Cr^2 = 2T = const$
$T = \frac{1}{2}\vec{L}\vec{\omega} \Rightarrow \vec{L}\vec{\omega} = const$ Projektion von $\vec{\omega}$ auf $\vec{L}$ konstant
$\Rightarrow$ Körperfestes System: $|\vec{\omega}|\&|\vec{L}|$ konstant $\Rightarrow$ Winkel zwischen $\vec{w}\&\vec{L}$ konstant
Beobachter im Körperfesten System sieht auch Präsession des Winkelgeschwindigkeitsvektors um den Drehimpulsvektor auf einem Kreis mit dem konstanten Radius $A\omega_\perp$. Gleichzeitig präzessiert $\vec{\omega}$ um körperfeste Symmetrieachse.
Bewegl für $\vec{\omega}$: $\omega z = r$ const, $\quad p(t) = \omega_\perp \sin(\Omega t), \quad \Omega = \frac{A-C}{A}r, \quad q(t) = \omega_\perp \cos(\Omega t)$

Bewegung des Kreisels im raumfesten System



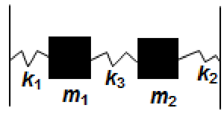
Euler'sche Winkel:

Lage der Figurenachse im Raum und 3 Freiheitsgrade.
Euler'sche Winkel geben die Lage des körperfesten Systems relativ zum raumfesten.
Transformation durch 3 Rotationen:

1) Drehung um Z-Achse um ψ
2) Drehung um neue x-Achse um ϑ
3) Drehung um neue z-Achse um φ

$\vartheta(t) = \arctan(\frac{A\omega_\perp}{Cr}) = const, \quad \psi(t) = \psi_0 + \frac{1}{A}\sqrt{(Cr)^2 + (A\omega_\perp)^2}t, \quad \varphi(t) = \frac{A-C}{A}rt$

Theorie Tutorium vom 29.6.2010



Beispiel: 2 gekoppelte harm. Oszillatoren in 1 Dim.

Ruhelagen $(a_{10}|a_{20})$, System ohne Spannungen
$\Rightarrow L = \frac{m_1}{2}\dot{a}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{a}_2^2 - V(a_1, a_2)$
$V(a_1, a_2) = \frac{1}{2}k_1(a_1 - a_{10})^2 + \frac{1}{2}k_2(a_2 - a_{20})^2 + \frac{1}{2}k_3((a1 - a_{10}) - (a_2 - a_{20}))^2$
$\Rightarrow$ Auslenkung $x \Rightarrow m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_3(x_1 - x_2) = 0, \quad m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 + k_3(x_1 - x_2) = 0$
Nun sei $m_1 = m_2, \quad k_1 = k_2$
Ansatz: $x_i = A_ie^{i\omega t}$
$\Rightarrow (\frac{k}{m} + \frac{k_3}{m} - \omega^2)A_1 + (-\frac{k_3}{m})A_2 = 0, \quad -\frac{k_3}{m}A_1 + (\frac{k}{m} + \frac{k_3}{m} - \omega^2)A_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{m} + \frac{k_3}{m} - \omega^2 & -\frac{k_3}{m} \\ -\frac{k_3}{m} & \frac{k}{m} + \frac{k_3}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} \frac{k}{m} + \frac{k_3}{m} - \omega^2 & -\frac{k_3}{m} \\ -\frac{k_3}{m} & \frac{k}{m} + \frac{k_3}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (\frac{k}{m} + \frac{k_3}{m} - \omega^2)^2 = (\frac{k_3}{m})^2 \Rightarrow \frac{k}{m} + \frac{k_3}{m} - \omega_{1,2}^2 = \pm\frac{k_3}{m} \Rightarrow \omega_{1,2} = \frac{k}{m} + \frac{k_3}{m} \mp \frac{k_3}{m}$
$\Rightarrow w_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad w_2 = \sqrt{\frac{k+2k_3}{m}}$
$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow (\cancel{\frac{k}{m}} + \frac{k_3}{m} - \cancel{\frac{k}{m}})A_1 - \frac{k_3}{m}A_2 = 0$
Also $A_1 = A_2 \Rightarrow$ 1. Lösung: $x_1 = A_1e^{i\omega_1t}, \quad x_2 = A_1e^{i\omega_1t}$
$w_2 = \sqrt{\frac{k+2k_3}{m}} \Rightarrow (\frac{k}{m} + \frac{k_3}{m} - \frac{k}{m} - \frac{2k_3}{m})A_1 - \frac{k_3}{m}A_2 = 0$
Also $A_1 = -A_2 \Rightarrow$ 2. Lösung: $x_1 = -A_2e^{i\omega_2t}, \quad x_2 = A_2e^{i\omega_2t}$
allgemeinste Lösung: $x_1 = c_1A_1e^{i\omega_1t} - c_2A_2e^{i\omega_2t}, \quad x_2 = \underbrace{c_1A_1e^{i\omega_1t}}_{\vartheta_1} + \underbrace{c_2A_2e^{i\omega_2t}}_{\vartheta_2}$

$\Rightarrow x_1 = \vartheta_1 - \vartheta_2, \quad x_2 = \vartheta_1 + \vartheta_2$

Bewegung in beschl Bezugssystemen

Lagrange-Funktion

$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \Rightarrow$ Lagrange-Gl. behalten Gestalt.

a) Übergang zu neuem, translatv-bewegten System $K' : \vec{v} = \vec{V}(t) + \vec{v}'$
Eingesetzt in $L = \frac{mv^2}{2} - U \;\Rightarrow\; L = \frac{m\vec{v}'^2}{2} + m\vec{v}'\vec{V} + \frac{m\vec{V}^2}{2} - U$
$m\vec{V}\vec{v}' = \underbrace{\frac{d}{dt}(m\vec{V}\vec{r}')}_{totale\ Ableitung} - m\vec{r}'\frac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow L' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} - \frac{d\vec{V}}{dt}m\vec{r} - U$

L' im System $K' \Rightarrow$ Lagrange-Gl.: $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}U - m\frac{d\vec{V}}{dt}$

b) rotierendes System K”, das mit K’ gemeins. Nullpkt.
$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}', \quad \vec{R} = \vec{R}(t)$
Ursprung des rot. Systems auf Ursprung des translativ bewegten Systems.
$\Rightarrow \vec{r}'' = \vec{r}'; \quad \vec{v}''$: Geschwindigkeit in Bezug auf rot. System
Dann gilt $\vec{v}' = \vec{v}'' + (\vec{\omega} \times \vec{r}'')$
$\Rightarrow L'' = \frac{m\vec{v}''^2}{2} + m\vec{v}''(\vec{\omega} \times \vec{r}'') + \frac{m}{2}(\vec{\omega} + \vec{r}'')^2 - m\frac{d\vec{V}}{dt}\vec{r}'' - U$

Bewegungsgleichung

Laborsystem: Index 0
$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m(\vec{\omega} \times \vec{r})$
$\vec{v}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{r}(\vec{v} \times \vec{\omega})$
$(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \vec{r}((\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega})$
$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \vec{\nabla}L = m(\vec{v} \times \vec{\omega}) + m((\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}) - maa\vec{v} - \vec{\nabla}U$
$\Rightarrow$Bewegungsgl.: $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) + m(\vec{\omega} \times \vec{v}) \Rightarrow \frac{md\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}U - m\dot{\vec{v}} + m(\vec{r} \times \dot{\vec{\omega}}) + 2m(\vec{v} \times \vec{\omega}) - m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))$
Zusätzl. zu $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$: Trägheitskräft:

a) $m(\vec{r} \times \dot{\vec{\omega}})$: unglm Rotation
b) $2m(\vec{v} \times \vec{\omega})$: Corioleskraft $\perp$ zu Geschw. und Drehachse
c) $-m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) = m\omega^2 p$: Zentrifugalkraft $\perp$ zur Drehachse von ihr weg, p: Abstand von Drehachse

Theorie Tutorium vom 6.7.2010

Hinweise Altklausur K2

Erhaltungssätze in L: $\quad m, V(\vec{r})$, L unabh. $q_k \Rightarrow \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}) = \frac{d}{dt}p_k = 0$. Also $\dot{y} = const.$

Hinweise Altklausur K3

Taylor, da kleine Schwingungen um die Ruhelage.
$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow x_{min} = 0$
1. Ordnung Taylor: $V(X)|_{x=0} + \frac{1}{1!}\frac{\partial V(X)}{\partial x}|_{x=0}x = 0$

Hinweise Altklausur K4

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) \Rightarrow \frac{d}{dt}(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} - L) = \frac{d}{dt}(\underbrace{\sum_i p_i\dot{q}_i - L}_{\text{Erhaltungsgröße}}) = 0$$