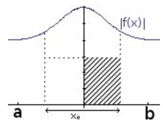
2 Besprechung in Mathematik für Physiker II zum Blatt 2, zum 28.4.2010

2.1

(Wie in R): $||x|| = ||x-y+y|| \leq ||x-y|| + ||y||$
$\left.\begin{array}{l} ||x|| - ||y|| \leq ||x-y|| \\ \text{auch } ||y|| - ||x|| \leq ||x-y|| \end{array}\right\}$
$\Rightarrow |||x|| - ||y||| \leq ||x-y||$, Einsetzen $-y$ statt y liefert ... + ...

2.2



a) $||f||_1 \geq 0$ trivial. $||\lambda f||_1 = \int_a^b |\lambda f(x)|dx = |\lambda| \int_a^b |f(x)|dx = |\lambda| ||f||_1$

$||f+g||_1 = \int_a^b |\underbrace{f(x)+g(x)}_{\leq |f(x)|+|g(x)|}|dx \leq \int_a^b |f(x)|dx + \int_a^b |g(x)|dx = ||f||_1 + ||g||_1$

$\Rightarrow ||.||_1$ Seminorm

Keine Norm, z.B. $a=0$, $b=1$, $f:(0,1] \to \mathbb{R}, f(0) := 1, f(x) := 0$ für $x \in (0,1], ||f||_1 = 0, f \neq 0$

a) Einschr. auf $C^0([a,b],\mathbb{R})$ ist Norm.

Z.z. Falls f ste. $\int_a^b |f| = 0, sof = 0$

Beweis:

Zeig: f ste, $f \neq 0 \to \int_a^b |f(x)|dx > 0$
Sei f ste., $f \neq 0$. Dann ex. $x_0 \in (a,b], |f(x)| > 0$
Es ex. $\delta > 0$ mit $\underbrace{[x_0 - \delta; x_0]}_{=:I} \subset [a,b] oder [x_0; x_0+\delta] \subset [a,b]$
und: $\forall x \in I : |f(x)| \geq \frac{|f(x_0)|}{2}$ (Stetigkeit von $x \mapsto |f(x)|$ bei x_0)
Somit $||f||_1 = \int_a^b |f(x)|dx \geq \int \underbrace{|f(x)|}_{\geq |f(x_0)/2} dx \geq \frac{f(x_0)}{2}\delta \geq 0$

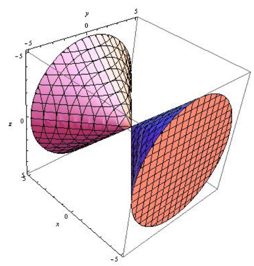
2.3

$||x||_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = ||x||_1, c_1 := 1.$

$||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| * 1 =< (|x_i|, ..., |x_n|), (1, ..., 1) > \leq ||x||_2 \cdot ||(1, ..., 1)||_2 = \sqrt{n}||x||_2$ (Cauchy Schwarz)

$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\leq ||x||_\infty}^2} = \sqrt{n||x||_\infty 2}\sqrt{n}||x||_0$

2.4



a) $\tilde{K} = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 | x_0^2 \geq x_1^2 + x_2^2\}$

b) $M := \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in K | -1 \leq x_0 \leq 1\}$
M ist abg: Sei $((x_0^{(n)}, ..., x_3^{(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in M die gegen $(x_0^*, x_1^*, ...x_3^*)$ konv., dann:
$\forall u \in \mathbb{N} : (x_0^{(n)})^2 \geq (x_1^{(n)})^2 + ... + (x_3^{(n)})^2$
$-1 \leq x_0^{(n)} \leq 1$
Folgt: $(x_o^*)^2 \geq (x_1^*)^2 + ... + (x_3^*)^2$

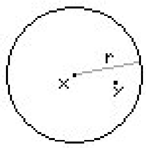
$-1 \leq x_0^* \leq 1$, also auch $(x_0^*, ..., x_3^*) \in M$
Also nach A5: M abg., $M = \overline{M}$
$\mathring{M} = \{(x_0, ..., x_3) | x_0^2 > x_1^2 + ... + x_3^2, -1 < x_0 < 1\}$
Beweis:

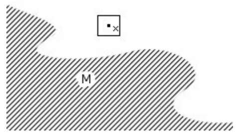
"$\subset$": Sei $(x_0, ..., x_3) \in \mathring{M}$, dann $x \in M$, also $x_0^2 \geq x_1^2 + ... + x_3^2, -1 \leq x_0 \leq 1$.
Es ex. $\delta > 0$ mit $\underbrace{B_{||.||_\infty}(x;\delta)}_{(x_0-\delta;x_0+\delta)\times(x_1-\delta;x_1+\delta)\times...(x_3-\delta;x_3+\delta)\times} \subset M$
Folgt: $x_0 \notin \{\pm 1\}$ (Sonst z.b. $(1 + \frac{\delta}{2}, x_1, x_2, x_3) \in B_{||.||_\infty}(x_0;\delta) \subset M, x_0^2 > x_1^2 + ... + x_3^2$ Widerspruch)
(Sonst falls $x_0^2 = x_1^2 + ... + x_3^2$ Widerpruch) „$\supset$“: Sei $(x_0, ..., x_3) = x \in$ rechte Seite.
Es ex. $\delta > 0$, so dass für alle $\tilde{x} = (\tilde{x_0}, ..., \tilde{x_3}) \in B_{||.||_\infty}(x_0;\delta)$ gilt:
$\tilde{x_0}^2 > \tilde{x_1}^2 + ... + \tilde{x_3}^2$, $-1 < \tilde{x_0} < 1$.
Somit $B_{||.||_\infty} \subset M$
$\partial M = \overline{M} \setminus \mathring{M} = \{(x_0, ..., x_3) \in \mathbb{R}^4 | x_0^2 \geq x_1^2 + ... + x_3^2, -1 \leq x_0 \leq 1$ und „=“ bei einer der drei Ungleichungen$\}$

2.5

a) Sei $y \in B(x, r)$, $\rho - ||x - y|| > 0$, $B(y;\rho) \subset B(x;r)$
Beweis: Für $z \in B(y;\rho)$; $||z - y + y - x|| \leq ||\underbrace{z - y}_{r-||y-x||}|| + ||y - x|| < r$, also $z \in B(x;r)$.

b) $\overline{M} := \{x \in \mathbb{R}^n | \forall \delta > 0 \exists y \in M \cap B(x;\delta)\}$
$\underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \overline{M}}_{\text{ist offen}} = \{x \in \mathbb{R}^n | \exists \delta_0 > 0 : B(x;\delta_0) \cap M = \emptyset\}$
Beweis: $x \in ..., \delta_0$ wie oben, so $B(x;\delta_0) \cap M = \emptyset$.
Nach a): $\forall y \in B(x;\delta_0) \exists r > 0 : B(y;r) \subset B(x;\delta_0)$.
Also $M \cap B(y, r) = \emptyset$. Somit $B(x;\delta_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$
. Also $\overline{M}$ abg.





c) (i)$\Rightarrow$(ii) Sei M abg.
Beh: $M = \overline{M}$
Bew: „$\subset$“ klar.
„$\supset$“: Sei $x \in \overline{M}$. M ist abgeschlossen, also $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen.
Wäre $x \notin M$, so würde $\delta > 0$ ex. mit $B(x;\delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$.
(ii)$\Rightarrow$(iii): Sei $M = \overline{M}, (x_j) \subset M, ||x_j - x|| \to 0$.
Beh: $x \in \overline{M}$
Bew: Sei $\delta > 0$. Es ex. $J \in \mathbb{N}$ mit $\forall j \geq J : ||x_j - x|| < \delta$. Dann $x_J \in M \cap B(x;\delta)$.
Also $x \in \overline{M}$. Wegen $\overline{M} = M$ folgt: Auch $x \in M$.
(iii)$\Rightarrow$(i): Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$.
Annahme: es existiert kein $\delta > 0$ mit $B(x;\delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$.
Dann Existiert zu $\delta_j := \frac{1}{j}$ ein $x_j \in M_j ||x_j - x|| < \frac{1}{j}$.
Also $||x_j - x|| \to 0$.
Nach (iii) dann $x \in M$, Widerspruch!.
Also ex. $\delta > 0$, $B(x, \delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$, also $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen, M abg.

d) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$
nach b) $\overline{M}$ abg.
nach c) (ii): $\overline{M} = \overline{\overline{M}}$

2.6 Hinweise zum nächsten Blatt

3&5 trivial.

1&2 schwer, aber in den meisten Büchern enthalten.

4 Taschenrechner benutzen!

6 nicht Trivial: B-Kugel in Norm $p < 1$ (natürlich keine richtige Norm). Versuche zu belegen, dass Dreiecksungleichung verletzt wird. Zwischen zwei Punkten (z.b. $(1, 0)$ und $(0, 1)$) Mitte betrachten und sehen, dass die Norm nicht kleiner 1 wird, wenn Sie das soll...