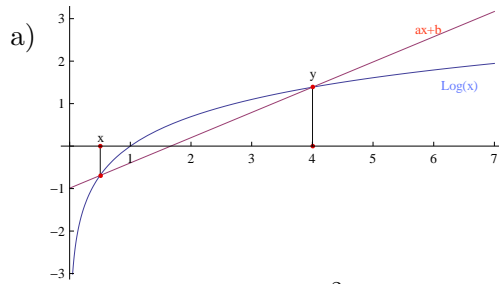


2 Besprechung in Mathematik für Physiker II zum Blatt 3, zum 28.4.2010

2.1



$$(1-t)f(x) + tf(y) \leq f((1-t)x + ty)$$

$$\xi_t := (1-t)x + ty$$

$$\Delta(t) := f(\xi_t) - ((1-t)f(x) + tf(y))$$

$$\Delta(0) = 0 = \Delta(1)$$

Annahme: $\exists t \in (0, 1), \Delta(t) < 0$. Dann Δ ein negatives Minimum bei einem $t_{min} \in (0, 1)$

$$\text{Es ist } \Delta'(t) = f'(\xi_t)(y-x) + f(x) - f(y)$$

$$\Delta''(t) = \underbrace{f''(\xi_t)}_{<0} (y-x)^2 > 0 \text{ Für } t \in [0, 1] < 0$$

Also $\Delta' < 0$ auf $(t_{min}, 1]$, $\Delta' > 0$ auf $[0, t_{min})$. Folgt: $\Delta(t_{min}) > 0$, Wid.

Somit $\Delta \geq 0$ auf $[0, 1]$

b) $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ (klar, falls $a, b=0$); Somit:

$$(1) \text{ äquivalent zu } \log(ab) \leq \log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \quad (2)$$

Beweis: nach a): $(t := \frac{1}{p}, 1-t = \frac{1}{q})$

$$\text{Rechte Seite} \geq \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{q} \log(b^q) = \log(a) + \log(b) = \log(ab) = \text{linke Seite}$$

2.2

Falls $|\langle x, y \rangle| \leq 1$ für alle x, y mit $\|x\|_p = 1 = \|y\|_q$, so folgt für bel. $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \left\langle \frac{x}{\|x\|_p}, \frac{y}{\|y\|_q} \right\rangle \right| \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad (\text{also Hölder-Ungleichung})$$

$$\text{Im Fall (*): } |\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_i |x_i| |y_i| \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} \right)$$

$$= \frac{1}{p} \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

2.3

$$\|x + y\|_1 = \sum (x_i + y_i) \leq \sum (|x_i| + |y_i|) = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

$$\|x + y\|_\infty = \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i \left(\underbrace{|x_i|}_{\leq \|x\|_\infty} + \underbrace{|y_i|}_{\leq \|y\|_\infty} \right) \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

2.4

$$2a\pi = 939951139km$$

$$2b\pi = 939819544km$$

$$L = 2a\pi - \underbrace{\pi \frac{a^2 - b^2}{2a}}_{65793km}$$

Abweichung zu $2b\pi \approx 65802km$, Erde-Mond $\approx 384400km$

2.5

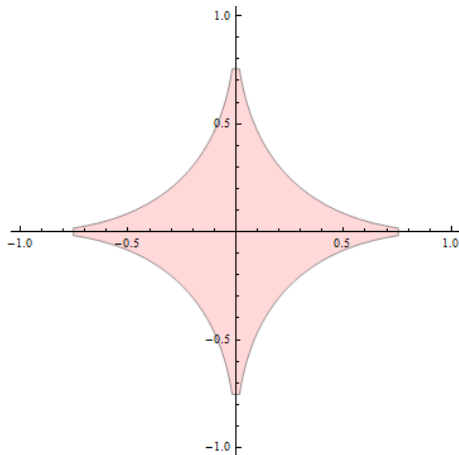
$$\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, f(x))$$

$$ds^2 = dx^2 + f'(x)^2 dx^2, ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$L(\gamma) = L(\tilde{\gamma}) = \int_a^b \sqrt{1^2 + (f'(x))^2} dx$$

$$L = \int_{-2}^2 \underbrace{\sqrt{1 + \cosh'(x)^2}}_{\cosh(x)} dx = 2\sinh(2) = e^2 - e^{-2}$$

2.6



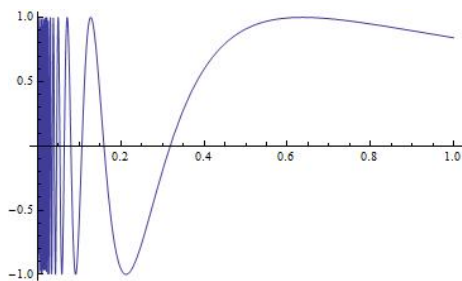
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \Rightarrow \sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow y = (1 - \sqrt{x})^2 = 1 + x - 2\sqrt{x}$$

Wäre $\|\cdot\|_{1/2}$ Norm, so wäre $\|0.5 * (1, 0) + 0.5 * (0, 1)\|_{1/2} \leq \|0.5(1, 0)\|_{1/2} + \|0.5(0, 1)\|_{1/2}$
 $= 0.5 \underbrace{\|(1, 0)\|_{1/2}}_1 + 0.5 \underbrace{\|(0, 1)\|_{1/2}}_1 = 1$

Aber $\|(0.5, 0.5)\|_{1/2} = (\sqrt{0.5} + \sqrt{0.5})^2 = (2\sqrt{0.5})^2 = 4 * 0.5 = 2$

2.7 Hinweise

1a) 1a) leicht



1b)

Vermutung, Abschluss schießt 0-Punkt und y-Achse von -1 bis 1 ein!

Beweis über Konvergenz der Folge aus der Menge zu allen Punkten UND

ALLe Punkte im Abschluss Element der Folgen.

2a) sehr trivial

2b) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ st. $\Leftrightarrow \forall U \subset \mathbb{R}^m$ offen: $f^{-1} \subset \mathbb{R}^n$ offen.

$\Leftrightarrow \forall U \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen: $f^{-1} \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen

(benutze $\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(U) = f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus U)$) f ste $\Rightarrow \exists$ Kugel \tilde{B} um x mit $f(\tilde{B}) \subset B \subset U$, also $f^{-1}(U)$ offen.

3 nicht überraschend...

4 plausibel (konsequenz Dreiecksungleichung (linker Teil!) \rightarrow stetig), vektorraum stetig nicht überraschend, Multiplikation stetig ganz elementar (1 Punkt (a,b), alle Punkte aus der Nähe sollen nicht mehr als epsilon abweichen etc)

5 Dreiecksregel, geometrische Formeln $\pi(P)(\tilde{x}, \tilde{y}, 0)$