4 Übungsblatt von Analysis 2 zum Mittwoch, den 12.5.2010

4.1

a) Wenn M Umgebung von x, so $\exists r > 0 : B(x,r) \subset M$.
Da $B(x,r)$ offen, gilt $B(x,r) \subset M \Rightarrow B(x,r) \subseteq int(M)$
Also M Umgebung von x $\Rightarrow x \in int(M)$
Wenn $x \in int(M)$, so $\exists r > 0 : B(x,r) \subset int(M)$
Da $int(M) \subseteq M$ ist $B(x,r) \subset M$. Damit ist M Umgebung von x.

b) $M = \{(x, sin(\frac{1}{x}), x \in (0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$
Vermutung: $\overline{M} = M \cup \{0\} \times [-1,1]$
$\overline{M} \supset M \cup \{0\} \times [-1,1]$ gilt, da:
$\overline{M} \supset M$ klar.
Sei $P(n) = (x_n, sin(\frac{1}{x_n}))$ mit $x_n = \frac{1}{arcsin(y)+2\pi n}$
Davon sind die Häufungspunkte $P(0) = (0,y)$ mit $y \in [-1,1]$.
Also ist $\{0\} \times [-1,1] \subset \overline{M}$
$\overline{M} \subset M \cup \{0\} \times [-1,1]$ gilt, da:
$Sei(x,y) \subset \overline{M}$. Dann $\exists (x_k, y_k) \subset M$ mit $x_k \to x$ und $y_k \to y$.
Dabei gilt $0 \leq x \leq 1$ und $y_k := sin(\frac{1}{x_k})$
$y = \lim y_k = \lim sin(\frac{1}{x_n})$. Dies eingeschränkt auf $x > 0$ ist $= sin(\frac{1}{x})$
Also $(x,y) \in M$. Für $x = 0$ gilt $y = \lim y_k \in [-1,1]$

4.2

a) Sei f bei x_0 stetig.
Dann gilt $\forall x \in M \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : ||x - x_0|| < \delta : ||f(x) - f(x_0)||_\infty < \varepsilon$
Also $\max_j |f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon$. Damit ist auch jede Komponente von F kleiner als ε.
Also auch alle f_j stetig bei x_0!
Seien alle f_j stetig bei x_0.
Dann gilt $\forall j \forall x \in M \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_j > 0 : ||x - x_0|| < \delta_j : |f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon$
Sei $\delta = \min(\delta_j)$. Dann gilt $\forall j \forall x \in M \forall \varepsilon : ||x - x_0|| < \delta : |f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon$, also auch $\max_j |f_j(x) - f_j(x_0)| = ||f(x) - f(x_0)||_\infty < \varepsilon$.
Also auch f stetig bei x_0

b) f stetig $\Rightarrow \forall M \subset \mathbb{R}^m$ offen: $f^{-1}(M) \subset \mathbb{R}^n$ offen.
Sei f stetig und $M \subset \mathbb{R}^m$ offen. Sei $x_0 \in f^{-1}(M) \subset \mathbb{R}^n,\ y_0 = f(x_0) \in M$
Also $\exists \varepsilon > 0 : B(y_0, \varepsilon) \subset M$.
Da f st. $\exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|| < \delta : ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon$
Folgt $f(B(x_0,\delta)) \subset B(y_0,\varepsilon) \subset M \Rightarrow B(x_0,\delta) \subset f^{-1}(M)$
Da dies für alle x_0 aus $f^{-1}(M)$ gilt, ist $f^{-1}(M)$ offen.
f stetig $\Leftarrow \forall M \subset \mathbb{R}^m$ offen: $f^{-1}(M) \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $x_0 \in f^{-1}(M) \subset \mathbb{R}^n,\ y_0 = f(x_0) \in M$
Dann $\exists \delta > 0 : B(x_0,\delta) \subset f^{-1}(M) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : f(B(x_0,\delta)) \subset B(y_0,\varepsilon) \subset M$,
damit M offen.
Also muss f stetig sein, damit dies für alle M offen gilt.
f stetig $\Leftrightarrow \forall M \subset \mathbb{R}^m$ abg.: $f^{-1}(M) \subset \mathbb{R}^n$ abg.. Sei $x_0 \in f^{-1}(M) \subset \mathbb{R}^n,\ y_0 = f(x_0) \in M$
Wähle $\tilde{M} = R^{\setminus}M$. Damit M abg. muss $\tilde{M}$ offen sein.
Nach erster Äquivalent gilt: f stetig $\Rightarrow \forall \tilde{M} \subset \mathbb{R}^m$ offen: $f^{-1}(\tilde{M}) \subset \mathbb{R}^n$ offen, da $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^m$
Ist also f stetig, so $\forall \tilde{M}$ offen : $f^{-1}(\tilde{M})$ offen,
also $\forall M$ abg. : $f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus M)$ offen,
also durch die Stetigkeit der Funktion auch : $f^{-1}(M)$ abg.
Daher muss auch f stetig sein, damit dies für alle $M \subset \mathbb{R}^m$ gilt.

4.3

V ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, sofern gilt (V,+) kommutative Gruppe, das Distributivgesetz für Addition in $\mathbb{R}$ und Multiplikation in V, sowie anders herum gilt, die Multiplikative Kommutivität in V mit $\mathbb{R}$ gilt und das unitäre Gesetz gilt.

(V,+) ist eine kommutative Gruppe, da für alle $f, g \in V$ gilt:

$$f + g = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + g_1 \\ \vdots \\ f_n + g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 + f_1 \\ \vdots \\ g_n + f_n \end{pmatrix} = g + f$$

Mit f_j als j-te Komponente von f. Da Kompositionen stetiger Funktionen stetig, ist f+g=g+f wieder in V.
Diese Aussagen gelten auch für die folgenden Ausführungen!

Distributivgesetz gilt, da für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in V$:

$$(\alpha + \beta) * f = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)f_1 \\ \vdots \\ (\alpha+\beta)f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha * f_1 + \beta * f_1 \\ \vdots \\ \alpha * f_n + \beta * f_n \end{pmatrix} = \alpha * f + \beta * f$$

$$\alpha * (f + g) = \begin{pmatrix} \alpha(f_1 + g_1) \\ \vdots \\ \alpha(f_n + g_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha * f_1 + \alpha * g_1 \\ \vdots \\ \alpha * f_n + \alpha * g_n \end{pmatrix} = \alpha * f + \alpha * g$$

Multiplikative Kommutativität gilt, da für alle $f \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(\alpha * \beta) * f = \begin{pmatrix} (ab)f_1 \\ \vdots \\ (ab)f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abf_1 \\ \vdots \\ abf_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(bf_1) \\ \vdots \\ a(bf_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (bf_1)a \\ \vdots \\ (bf_n)a \end{pmatrix} = (b * f) * a$$

Unitäres Gesetz: $1 * f = \begin{pmatrix} 1 * f_1 \\ \vdots \\ 1 * f_n \end{pmatrix} = f$

Also Vektorraum!

4.4

a) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
Für Stetigkeit muss gelten $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : ||x - x_0|| < \delta : |||x|| - ||x_0||| < \varepsilon$.
$|||x|| - ||x_0||| \leq ||x - x_0|| \leq \delta$. Also wähle $\varepsilon = \delta$, sodass Stetigkeit gilt!

b) Sei $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$
Für Stetigkeit muss gelten $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : ||(x, y) - (x_0, y_0)|| < \delta : ||x + y - x_0 - y_0|| < \varepsilon$
Wird die 1-Norm benutzt gilt weiterhin:
$||x + y - x_0 - y_0||_1 = ||x - x_0 + y - y_0||_1 \leq ||x - x_0||_1 + ||y - y_0||_1 = ||(x, y) - (x_0, y_0)||_1 < \delta$
Setzt mal also $\delta = \varepsilon$, so gilt die Stetigkeit.

c) Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Für Stetigkeit muss gelten $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : ||(a, b) - (a_0, b_0)||_\infty < \delta : ||a * b - a_0 * b_0|| < \varepsilon$
$|ab - a_0b_0| = |ab - a_0b_0 + a_0b - a_0b| \leq |ab - a_0b| + |a_0b - a_0b_0| = |b||a - a_0| + |a_0||b - b_0|$
$\leq |1 + b_0||a - a_0| + |a_0||b - b_0| \leq ||(a, b) - (a_0, b_0)||_\infty(1 + |b_0| + |a_0|) < \varepsilon(1 + |b_0| + |a_0|)$
Also wähle man $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+|b|+|a|}\}$ für Stetigkeit.

4.5

Sei Zielpunkt $E := (x_0, y_0, 0)$ und Ausgangspunkt $P := (x, y, z)$.
Durch Strahlensatz gilt: $\frac{x}{1-z} = \frac{x_0}{r}$ mit r:Radius Einheitssphäre=1.
Also $x_0 = \frac{x}{1-z}$. Gleiches gilt für $y_0 = \frac{y}{1-z}$. $z_0 = 0$.
Also $\Pi(x, y, z) \mapsto (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0)$.

Zur Berechnung der Inversen gilt es z anhand x_0 und y_0 zu bestimmen.
$x_0^2 + y_0^2 = \frac{x^2+y^2}{(1-z)^2} = \frac{1+z}{1-z}$
$\Rightarrow 1 + z = (x_0^2 + y_0^2)(1 - z) \Rightarrow z = \frac{x_0^2+y_0^2-1}{x_0^2+y_0^2+1}$
$\Rightarrow x = x_0(\frac{2}{x_0^2+y_0^2+1}),\ y = y_0(\frac{2}{x_0^2+y_0^2+1})$
Also $\Pi^{-1}(x_0, y_0, 0) \mapsto (x_0(\frac{2}{x_0^2+y_0^2+1}), y_0(\frac{2}{x_0^2+y_0^2+1}), \frac{x_0^2+y_0^2-1}{x_0^2+y_0^2+1})$

Da die einzelnen Komponenten aus Kompositionen stetiger Funktionen bestehen (eingeschränkt auf Punkte außerhalb des Nordpols) sind die Funktionen Π und Π^{-1} komonentenweise stetig und damit setig.