5 Übungsblatt von Analysis 2 zum Mittwoch, den 19.5.2010

5.1

a) $D(\phi \cdot f)(x,y,z)(v) = f(x,y,z) \cdot D\phi(x,y,z)(v) + \phi(x,y,z) \cdot Df(x,y,z)(v)$
$= (1,0,e^{1+\frac{\pi}{2}}) \cdot ((\pi,1,2)\cdot(1,2,3)) + (1+\frac{\pi}{2}) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ e^{1+\frac{\pi}{2}} & e^{1+\frac{\pi}{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot (1,2,3)$
$= (1,0,e^{1+\frac{\pi}{2}}) \cdot (8+\pi) + (1+\frac{\pi}{2}) \cdot (-1,3,3e^{1+\frac{\pi}{2}})$
$= \left(8+\pi, 0, e^{1+\frac{\pi}{2}}(8+\pi)\right) + \left(-1-\frac{\pi}{2}, 3\left(1+\frac{\pi}{2}\right), 3e^{1+\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\right)$
$= \left(7+\frac{\pi}{2}, 3+\frac{3}{2}\pi, e^{1+\frac{\pi}{2}}(11+\frac{5}{2}\pi)\right)$

b) $J_\psi(1,1) = \begin{pmatrix} \partial_1\psi_1(1,1) & \partial_2\psi_1(1,1) \\ \partial_1\psi_2(1,1) & \partial_2\psi_2(1,1) \\ \partial_1\psi_3(1,1) & \partial_2\psi_3(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$
Da Spaltenvektoren von $J_\psi(1,1)$ linear unabhängig, bilden Sie das das Bild und eine Basis dieses Unterraums, also

$Bild(D\psi(1,1)) = Basis(Bild(D\psi(1,1))) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$

5.2

$$grad(div(f)) - rot(rot(f)) = grad\left(x^3e^y\cos(z) + \frac{2xz\arctan(y)}{z^2+1} + 2xe^z\sin(y)\right)$$
$$-rot\left(x^3e^y\sin(z) + \frac{x\log\left(z^2+1\right)}{y^2+1}, x^2e^z\sin(y) - \arctan(y)\log\left(z^2+1\right), 3x^2e^y\cos(z) - x^2e^z\cos(y)\right)$$
$$= \begin{pmatrix} 3x^2e^y\cos(z) + \frac{2z\arctan(y)}{z^2+1} + 2e^z\sin(y) \\ x^3e^y\cos(z) + \frac{2xz}{(y^2+1)(z^2+1)} + 2xe^z\cos(y) \\ x\left(x^2(-e^y)\sin(z) - \frac{2\left(z^2-1\right)\arctan(y)}{(z^2+1)^2} + 2e^z\sin(y)\right) \end{pmatrix}$$
$$- \begin{pmatrix} 3x^2e^y\cos(z) + \frac{2z\arctan(y)}{z^2+1} \\ x\left(\left(x^2-6\right)e^y\cos(z) + \frac{2z}{(y^2+1)(z^2+1)} + 2e^z\cos(y)\right) \\ x^3(-e^y)\sin(z) + \frac{2xy\log\left(z^2+1\right)}{(y^2+1)^2} + 2xe^z\sin(y) \end{pmatrix}$$
$$= \left(2e^z\sin(y), 6xe^y\cos(z), 2x\left(-\frac{y\log\left(z^2+1\right)}{(y^2+1)^2} - \frac{\left(z^2-1\right)\arctan(y)}{(z^2+1)^2}\right)\right)$$
$$\Delta f = \begin{pmatrix} 2e^z\sin(y) - x^2e^z\sin(y) + x^2e^z\sin(y) \\ 6xe^y\cos(z) + x^3e^y\cos(z) - x^3e^y\cos(z) \\ -\frac{2xy\log\left(z^2+1\right)}{(y^2+1)^2} + x\left(\frac{2}{z^2+1} - \frac{4z^2}{(z^2+1)^2}\right)\arctan(y) \end{pmatrix}$$
$$= \left(2e^z\sin(y), 6xe^y\cos(z), -\frac{2xy\log\left(z^2+1\right)}{(y^2+1)^2} - \frac{2x\left(z^2-1\right)\arctan(y)}{(z^2+1)^2}\right)$$
$$= \left(2e^z\sin(y), 6xe^y\cos(z), 2x\left(-\frac{y\log\left(z^2+1\right)}{(y^2+1)^2} - \frac{\left(z^2-1\right)\arctan(y)}{(z^2+1)^2}\right)\right)$$
$$= grad(div(f)) - rot(rot(f))$$

5.3

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_1\psi_1 & \partial_2\psi_1 & \partial_3\psi_1 \\ \partial_1\psi_2 & \partial_2\psi_2 & \partial_3\psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & e^y\sin(z) & e^y\cos(z) \\ y^3z^2 - e^z\sin(x) & 3xy^2z^2 & 2xzy^3 + e^z\cos(x) \end{pmatrix}$$
$$J_f(1,0,\tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -e^{\pi/2}\sin(1) & 0 & e^{\pi/2}\cos(1) \end{pmatrix}$$

5.4

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(x_1,x_2) & \partial_2 F_1(x_1,x_2) \\ \partial_1 F_2(x_1,x_2) & \partial_2 F_2(x_1,x_2) \\ \partial_1 F_3(x_1,x_2) & \partial_2 F_3(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-x_2^2} & 2e^{-x_2^2}x_1x_2 \\ \pi\cos(\pi x_1) & \pi\sin(\pi x_2) \\ x_2^2+2x_1 & 2x_1x_2 \end{pmatrix}$$

$$J_G(y) = \begin{pmatrix} \partial_1 G_1(y_1,y_2,y_3) & \partial_2 G_1(y_1,y_2,y_3) & \partial_3 G_1(y_1,y_2,y_3) \\ \partial_1 G_2(y_1,y_2,y_3) & \partial_2 G_2(y_1,y_2,y_3) & \partial_3 G_2(y_1,y_2,y_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_3^2 + y_1 & 2y_2y_3 - y_1 \\ 3y_1^2y_2^3y_3^3 + \frac{y_2}{y_1y_2+y_3} & 3y_1^3y_2^2y_3^3 + \frac{y_1}{y_1y_2+y_3} & 3y_1^3y_3^2y_2^3 + \frac{1}{y_1y_2+y_3} \end{pmatrix}$$

5.5

$F(1,1) = (-\frac{1}{e},1,2) \in M$, da $-\frac{1}{e}+2>0$
Da M offen Existiert eine Umgebung U von (1,1) sodass $F(U) \subset M$. Damit ist $H = G \circ F$ auf U definiert und total differenzierbar, da es eine Komposition von differenzierbaren Funktionen ist.

$$J_F(1,1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{e} & \frac{2}{e} \\ -\pi & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J_G(-\tfrac{1}{e},1,2) = \begin{pmatrix} -1 & 4-\frac{1}{e} & 4+\frac{1}{e} \\ \frac{1}{2-\frac{1}{e}} + \frac{24}{e^2} & -\frac{24}{e^3} - \frac{1}{(2-\frac{1}{e})e} & \frac{1}{2-\frac{1}{e}} - \frac{12}{e^3} \end{pmatrix}$$

$$J_H(1,1) = J_G(-\tfrac{1}{e},1,2)\cdot J_F(1,1)$$

$$= \begin{pmatrix} 3\left(4+\frac{1}{e}\right) + \frac{1}{e} - \left(4-\frac{1}{e}\right)\pi & 2\left(4+\frac{1}{e}\right) - \frac{2}{e} \\ 3\left(\frac{1}{2-\frac{1}{e}} - \frac{12}{e^3}\right) - \frac{\frac{1}{2-\frac{1}{e}}+\frac{24}{e^2}}{e} - \left(-\frac{24}{e^3} - \frac{1}{(2-\frac{1}{e})e}\right)\pi & 2\left(\frac{1}{2-\frac{1}{e}} - \frac{12}{e^3}\right) + \frac{2\left(\frac{1}{2-\frac{1}{e}}+\frac{24}{e^2}\right)}{e} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4-4e(-3+\pi)+\pi}{e} & 8 \\ \frac{60+3e^4+e^3(-1+\pi)-24\pi+24e(-5+2\pi)}{e^3(-1+2e)} & \frac{2(-12+24e+e^3+e^4)}{e^3(-1+2e)} \end{pmatrix}$$

5.6

„$\Rightarrow$“:

Sei $f'(z_0) = \alpha + i\beta$ und f bei z_0 komplex differenzierbar.
Dann gilt:
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta : |f'(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)| \le \varepsilon |z - z_0|$
Also ist $Df(z_0)$ über die Multiplikation mit $f'(z_0) = \alpha + i\beta$ definiert, existiert also.
$f'(z_0)(1,0) = Df(z_o)(1,0) = \alpha + i\beta = (\alpha,\beta)$
$f'(z_0)(0,1) = Df(z_o)(0,1) = -\beta + i\alpha = (-\beta,\beta)$
Daher ist $J_f(z_0) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

„$\Leftarrow$“:

Existiere $Df(z_0)$, (also f sei bei z_0 reell differenzierbar)
und sei $J_f(z_0) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$
Dann gilt:
$\forall v \in \mathbb{C} : Df(z_o)v = (\alpha + i\beta)v$ und
$\forall z \in U : |f(z) - f(z_0) - (\alpha + i\beta)(z - z_0)| = |f(z) - f(z_0) - Df(z_0)(z - z_0)|$
Daraus folgt, f ist komplex differenzierbar, $f'(z_0) = \alpha + i\beta$