

## 4 Besprechung in Mathematik für Physiker II zum Blatt 3, zum 28.4.2010

### 4.1

b)

$$\psi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}, J_\psi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & -2v \end{pmatrix}, J_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Spaltenvektoren linear unabh., daher Basis des Bildes von  $D\psi(1, 1)$

### 4.2

$$\operatorname{div}(f) = \partial_1 f_1 + \dots \partial_2 f_2 = 2x \sin(y)e^z + x^3 \cos(z)e^y + x \arctan(y) \frac{2z}{1+z^2}$$

$$\nabla \operatorname{div}(f) = (2 \sin(y)e^z + 3x^2 \cos(z)e^y + \arctan(y) \frac{2z}{1+z^2}, \dots, \dots)$$

$$\operatorname{rot}(f) = \left( \frac{x \log(1+z^2)}{1+y^2} + x^3 y \sin(z), x^2 \sin(y)e^z - \arctan(y) \log(1+z^2), 3x^2 \cos(z)e^y - x^2 \cos(y)e^z \right)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(f)) = (\dots, \dots, \dots)$$

$$\Delta f_1 = \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 f_1 + \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f_1 + \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f_1 = 2 \sin(y)e^z - x^2 \sin(y)e^z + x^2 \sin(y)e^z$$

$$\nabla \operatorname{div}(f) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(f)) = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix} \text{ für alle } C^2\text{-Vf } f$$

### 4.3

$$J_f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & \sin(z)e^y & \cos(z)e^y \\ y^3 z^2 - e^z \sin(x) & 3y^2 x z^2 & 2z x y^3 + e^z \cos(x) \end{pmatrix}$$

$$\text{Bei } (1, 0, \frac{\pi}{2}): \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -e^{\pi/2} \sin(1) & 0 & e^{\pi/2} \cos(1) \end{pmatrix}$$

### 4.4

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} -e^{-x_2^2} & 2x_1 x_2 e^{-x_2^2} \\ \pi \cos(\pi x_1) & \pi \sin(\pi x_2) \\ 2x_1 + x_2^2 & 2x_1 x_2 \end{pmatrix} = \left( \partial_1 F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \partial_2 F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)$$

$J_G$  analog.

### 4.5

$$F(1, 1) = \begin{pmatrix} -e^{-1} \\ +1 \\ 2 \end{pmatrix} =: (y_1, y_2, y_3), y_1 y_2 + y_3 = -e^{-1} + 2 > 0$$

$\Rightarrow F(1, 1) \in M$  ( $M \subset \mathbb{R}^3$  offen); Mit  $f(y_1, y_2, y_3) := y_1 y_2 + y_3$  ist  $M = f^{-1}((0, \infty))$

Urbild offener Menge unter der st. Fu f.

Da F ste. ex. Umg. von (1,1) in  $\mathbb{R}^2$ , die nach M abgebildet wird. Auf  $:G \circ F$  definiert.

Nach Kettenregel:  $G \circ F$  auf U dbar.

$$J_H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = J_G(F(1, 1)) \cdot J_F(1, 1) = (\text{Einsetzen in Formel aus Aufgabe 4})$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -e^{-1} + 4 & e^{-1} + 4 \\ \frac{1}{2-e^{-1}} + 24e^{-2} & \frac{-e^{-1}}{2-e^{-1}} - 24e^{-3} & \frac{1}{2-e^{-1}} - 12e^{-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -e^{-1} & 2e^{-1} \\ -\pi & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \text{Ergebnis}$$

## 4.6

„ $\Rightarrow$ “

Sei  $f$  bei  $z_0$  komplex dbar. Sei  $\varepsilon > 0$

*Es ex.  $\delta > 0$  mit  $\forall z \in U, |z - z_0| < \delta : |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|$*

Die Abbildung  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \ni v \mapsto f'(z_0) \cdot v$  erfüllt offenbar die Def. der Dbarkeit., ist also gleich  $Df(z_0) \Rightarrow$  ex.

Darstellende Matrix  $f'(z_0) = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$Df(z_0)(1, 0) = f'(z_0) \cdot 1 = \alpha + i\beta * \alpha(1, 0) + \beta(0, 1)$

$Df(z_0)(0, 1) = f'(z_0) \cdot i = \alpha i - \beta = -\beta(1, 0) + \alpha(0, 1)$

Also  $Df(z_0)$  durch mult mit  $J_f(z_0) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$  gegeben.

„ $\Leftarrow$ “

Sei  $f$  reell dbar. bei  $z_0$  und  $J_f(z_0) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ . Setze  $c = \alpha + i\beta$

Zu  $\varepsilon > 0$  ex.  $\delta > 0$  mit  $\forall z \in U : ||z - z_0| < \delta : |f(z) - f(z_0) - J_f(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|$

$J_f(z_0)(z - z_0) = \underbrace{c(z - z_0)}_{\text{reell mult.}} = \underbrace{c(z - z_0)}_{\text{komplx. mult.}}$

Also  $f$  komplex dbar bei  $z_0, f'(z_0) = c = \alpha + i\beta$

## 5 Hinweise zum neuen Blatt:

3) losdifferent. Kugel etc.

2) Zylinder (b und r) (nach r radial nach außen, nach z nach oben, phi nach hinten)

1) geom arg (young ungl.) (monoton wachsend, umkehrbar f mit einem x=a und y=b (beliebig, kein Zusammenhang),  $a * b \rightarrow$  Rechteck, Ecke liegt nicht auf Graf, Teilfläche unten  $\int_0^1 f(x) dx > \int_0^b f^{-1}(y) dy$ )

4) (Projektion) Spiegelung am Einheitskreis:  $z \rightarrow 1/\bar{z} = 1/(x - iy) = (x + iy)/(x^2 + y^2)$  Betrag:  $r \rightarrow 1/r$  nicht linear.

Stereographische Projektion Formel  $\iota : z \mapsto 1/z, \pi^{-1} \circ \iota \circ \pi \dots$

5) Trivial

6) Großkreisbogen mit MP bei Kugelmittelpunkt kleinste Strecke. wie weit nordlich?