1 Hausaufgabenbesprechung 14.11.12

1.1 Aufgabe

a) $$A^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5-2 & -3 & \end{pmatrix}$$

$$P^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^{(0)} = P_0 A^{(0)} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = G_1 \tilde{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -2 & -3 \\ 0 & 11/5 & 9/5 \\ 0 & 17/5 & 13/5 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^{(1)} = P_1 A^{(1)} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -3 \\ 0 & 17/5 & 13/5 \\ 0 & 11/5 & 9/5 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = G_2 \tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -3 \\ 0 & 17/5 & 13/5 \\ 0 & 0 & 2/17 \end{pmatrix} = R$$

$$L = \tilde{G}_1^{-1} \tilde{G}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & 11/17 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Lc_1 = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & 11/17 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \tilde{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = (1, -1/5, -8/17)^T$$

$$Lc_2 = b_2 \Rightarrow ... \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_2 = (0, 1, -11/17)^T$$

$$Lc_3 = b_3 \Rightarrow ... \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_3 = (0, 0, 1)T$$

$$Rx = c_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & -2 & -3 \\ 0 & 17/5 & 13/5 \\ 0 & 0 & 2/17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/5 \\ -8/17 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = (1, 3, -4)^T$$

$$Rx = c_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & -2 & -3 \\ 0 & 17/5 & 13/5 \\ 0 & 0 & 2/17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -11/17 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_2 = (3/2, 9/2, -11/2)^T$

$$Rx = c_3 \Rightarrow ... = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = (-5/2, -13/2, 17/2)^T$$

$$\Rightarrow (PA)^{-1} = A^{-1}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -5/2 \\ 3 & 9/2 & -13/2 \\ -4 & -11/2 & 17/2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}P^{-1}P = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -5/2 \\ 3 & 9/2 & -13/2 \\ -4 & 11/2 & 17/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/2 & -5/2 & 1 \\ 9/2 & -13/2 & 3 \\ -11/2 & 17/2 & -4 \end{pmatrix}$$

1.2 Aufgabe

$cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$
$cond_p(A) = \|A\|_p\|A^{-1}\|_p \ , \quad 1 \leq p \leq \infty$
$cond_f(A) = \|A\|_f\|A^{-1}\|_f$

1. $cond(AB) = \|AB\|\|(AB)^{-1}\| = AB\|\|B^{-1}A^{-1}\| \leq \|A\|\|B\|\|B^{-1}\|\|A^{-1}\|$
   $= \|A\|\|A^{-1}\|\|B\|\|B^{-1}\| = cond(A)cond(B)$
2. $cond(\alpha A) = \|\alpha A\|\|(\alpha A)^{-1}\| = \|\alpha A\|\|A^{-1}\alpha^{-1}\| = |\alpha|\|A\||\alpha^{-1}|\|A^{-1}\|$
   $= |\alpha|\|A\||\alpha^{-1}|\|A^{-1}\| = |\alpha||\alpha^{-1}|\|A\|\|A^{-1}\| = \|A\|\|A^{-1}\| = cond(A)$
3. $cond_2(U) = \|U\|_2\|U^{-1}\|_2 \overset{orth}{=} \|U\|_2\|U^T\|_2 = \sup\limits_{\|x\|_2=1} \|Ux\|_2 \sup\limits_{\|x\|_2=1} \|U^Tx\|_2$
   $\overset{*}{=} \sup\limits_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = 1 \cdot 1 = 1$
   mit *: $\begin{cases} \|Ux\|_2^2 = (Ux)^TUx = x^TU^TUx = x^Tx = \|x\|_2^2 \\ \|Ux\|_1 \overset{orth}{=} \|x\|_2 \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$
4. $cond_2(UA) = \|UA\|_2\|(UA)^{-1}\|_2 \overset{orth}{=} \|UA\|\|A^{-1}U^T\|_2$
   $= \sup\limits_{\|x\|_2=1} \|UAx\|_2 \sup\limits_{\|x\|_2=1} \|A^{-1}U^Tx\|_2$
   $\overset{*}{=} \sup\limits_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \sup\limits_{\|x\|_2=1} \|A^{-1}U^Tx\|_2$
   $= \sup\limits_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \sup\limits_{\|y\|_2=1} \|A^{-1}y\|_2 = \|A\|\|A^{-1}\|_2 = cond_2(A)$
5. zz: $cond_2(A) \leq cond_F(A) \leq n \cdot cond_\infty(A)$
   Zeige zuerst $cond_2(A) \leq cond_F(A)$
   $cond_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \max\limits_{x\neq0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \max\limits_{x\neq0} \frac{\|A^{-1}x\|_2}{\|x\|_2}$
   Betrachte nun nur $\|Ax\|_2$ ($\|A^{-1}x\|_2$ äquivalent)

$$\|Ax\|_2 = \sqrt{\sum_i (\sum_j a_{ij})^2} \leq \underbrace{\sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}}_{\|A\|_F} \underbrace{\sqrt{\sum_j x_j^2}}_{\|x\|_2}$$

$\Rightarrow \|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2$

$\Rightarrow \|A\|_2 = \max \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A\|_F$ (äquivalent mit $\|A^{-1}x\|_2$)

$\Rightarrow cond_2(A) \leq cond_F(A)$

Zeige nun: $cond_f(A) \leq n \cdot cond_\infty(A)$

$cond_F(A) = \|A\|_F \|A^{-1}\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2} \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}$

Betrachte nun nur $\sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}$:

$\|A\|_F = \sum_i \sum_j a_{ij}^2 \leq n \max\limits_{i=1,\ldots,n} \sum_k |a_{ik}|^2 = n\|A\|_\infty$

Da $\|A\|_F$ äquivalent

$\Rightarrow cond_F(A) \leq ncond_\infty(A)$

$\Rightarrow cond_2(A) \leq cond_F(A) \leq n \cdot cond_\infty(A)$

1.3 Aufgabe

$$y = (y_{jk}) \quad y_{jk} = \begin{cases} * & j > i \wedge k = 1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$(I - y)(I + y) = I^1 - Y^2 = I - A \;\; mit \;\; A = (a_{jk}) a_{jk} = \sum\limits_{l=1}^{n} y_{jl} y_{lk} = 0$

$l < i \Rightarrow x_{j1} y_{ik} = 0$

$l = 1 \Rightarrow x_{jl} = 0$

$l > 1 \Rightarrow x_{lk} = 0$

$\Rightarrow I - A = I$

A nicht singulär hat eindeutige Lösung

Seien L, L^* LVPM und R, R^* RODM

sodass $LR = A = L^* R^* \Leftrightarrow L^{*-1} L = R^* R^{-1} \Rightarrow L^* = L \quad R^* = R$

1.4 Aufgabe: Normalenhleigung/Ausgleichsproblem

Wir betrachten die Daten

0	3	4	7
1	2	6	4

und suchen eine Ausgleichs-Gerade: $u(x) = c_1 + c_2 x$, sodass die Fehlerquadrate minimal sind.

Betrachte das GLS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mit } A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 14 & 14 & 17 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 58 \end{pmatrix}$$

lautet die zugehörige Normalengleichung:

$$\begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 14 & 75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 58 \end{pmatrix}$$

deren Lösung lautet $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \bar{x}$

Residuum: $b - Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 5/2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Ausgleichsgerade: $u(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x$