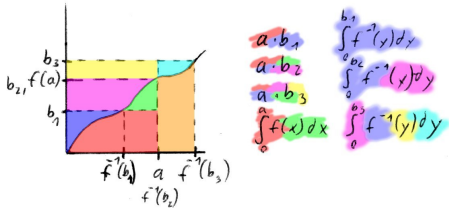


6 Übungsblatt von Analysis 2 zum Mittwoch, den 26.5.2010

6.1

a) 1. Fall: $b_1 < f(a)$:

Zu zeigen ist, dass das Rechteck der Seitenlängen $a * b_1$ kleiner gleich $\int_0^a f(x)dx + \int_0^{b_1} f(y)dy$ ist. Wie in der Zeichnung zu sehen, bildet der rote und der blaue Bereich das Rechteck $a * b_1$. Dieses Rechteck zusammen mit dem grünen Bereich ist jedoch $\int_0^a f(x)dx + \int_0^{b_1} f(y)dy$. Da also das Rechteck davon eingeschlossen wird, gilt die Behauptung hier.



2. Fall: $b_2 = f(a)$:

Nun soll das Rechteck $a * b_2$ im Bereich von $\int_0^a f(x)dx$ und $\int_0^{b_2} f(y)dy$ enthalten sein. In der Zeichnung wird $\int_0^a f(x)dx$ von Rot und Grün und $\int_0^{b_2} f(y)dy$ von Blau und Violett gebildet. Das Rechteck $a * b_2$ ist aber gerade Rot, Grün, Blau und Violett! Daher sind die beiden Flächen identisch, das Rechteck also in der Summe der Integrale enthalten.

3. Fall: $b_3 > f(a)$:

Das Rechteck $a * b_3$ wird in der Zeichnung nun gebildet von Rot, Blau, Grün, Violett und Gelb. $\int_0^{b_3} f(y)dy$ wird durch die Farben Blau, Violett, Gelb und Türkis dargestellt. Zusammen mit dem rot-blauen $\int_0^a f(x)dx$ enthält der Menge der Farben von $\int_0^a f(x)dx + \int_0^{b_3} f(y)dy$ die von $a * b_3$, weswegen auch hier die Aussage gilt.

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) &:= x^{p-1} \Rightarrow f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{p-1}} \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= 1 \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{q-1}{q} \Rightarrow p = \frac{q}{q-1} \Rightarrow p-1 = \frac{1}{q-1} \\ a \cdot b &\leq \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b y^{q-1} dy = \left[\frac{1}{p} x^p \right]_0^a + \left[\frac{1}{q} y^q \right]_0^b = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \end{aligned}$$

6.2

a) $\kappa_1 = r \cos(\varphi)$, $\kappa_2 = r \sin(\varphi)$, $\kappa_3 = z \Rightarrow \kappa$ stetig da Komponenten alle stetig.

κ ist bijektiv, wenn $(r_1, \varphi_1, z_1) \neq (r_2, \varphi_2, z_2) \Leftrightarrow (r_1 \cos(\varphi_1), r_1 \sin(\varphi_1), z_1) \neq (r_2 \cos(\varphi_2), r_2 \sin(\varphi_2), z_2)$

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{ccc} z_1 & = & z_2 \\ r_1 \cos(\varphi_1) & = & r_2 \cos(\varphi_2) \\ r_1 \sin(\varphi_1) & = & r_2 \sin(\varphi_2) \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc} r_1^2 (\cos(\varphi_1)^2 + \sin(\varphi_1)^2) & = & r_2^2 (\cos(\varphi_2)^2 + \sin(\varphi_2)^2) \\ \cos(\varphi_1) & = & \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_1) & = & \sin(\varphi_2) \end{array} \right| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{ccc} z_1 & = & z_2 \\ \varphi_1 & = & \varphi_2 \\ r_1 & = & r_2 \end{array} \right| \text{ Also } \kappa \text{ bijektiv.}$$

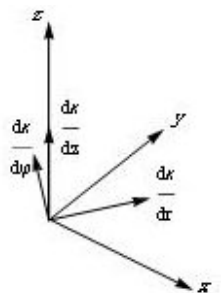
$$\forall (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in M \exists (r, \varphi, z) : \kappa((r, \varphi, z)) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$$

$$\left| \begin{array}{ccc} r \cos(\varphi) & = & \tilde{x} \\ r \sin(\varphi) & = & \tilde{y} \\ z & = & \tilde{z} \end{array} \right|$$

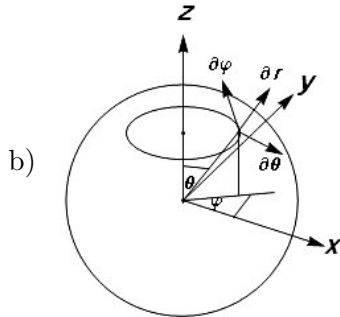
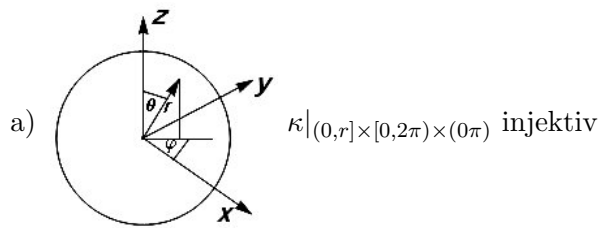
$$\Rightarrow r = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\right) & x > 0, y > 0 \\ \arctan\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\right) + \pi & x < 0 \\ \arctan\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\right) + 2\pi & x > 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Also Inverse auch stetig.

$$\text{b) } \frac{\partial}{\partial r} \kappa(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \kappa(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial}{\partial z} \kappa(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



6.3



$$I_k(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \kappa_1}{\partial r} & \frac{\partial \kappa_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial \kappa_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \kappa_2}{\partial r} & \frac{\partial \kappa_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial \kappa_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \kappa_3}{\partial r} & \frac{\partial \kappa_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial \kappa_3}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\theta) & -r \sin(\varphi) \sin(\theta) & r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) & r \cos(\varphi) \sin(\theta) & r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 0 & -r \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &< \partial_r \kappa(r, \varphi, \theta), \partial_\varphi \kappa(r, \varphi, \theta) > \\ &= -r \sin(\varphi) \cos(\varphi) \sin^2(\theta) + r \sin(\varphi) \cos(\varphi) \sin^2(\theta) + 0 = 0 \\ &< \partial_r \kappa(r, \varphi, \theta), \partial_\theta \kappa(r, \varphi, \theta) > \\ &= r \cos^2(\varphi) \sin(\theta) \cos(\theta) + r \sin^2(\varphi) \sin(\theta) \cos(\theta) - r \sin(\theta) \cos(\theta) \\ &= r \sin(\theta) \cos(\theta) - r \sin(\theta) \cos(\theta) = 0 \\ &< \partial_\varphi \kappa(r, \varphi, \theta), \partial_\theta \kappa(r, \varphi, \theta) > \\ &= -r^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \sin(\theta) \cos(\theta) + r^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \sin(\theta) \cos(\theta) + 0 = 0 \end{aligned}$$

6.4

$$\begin{aligned} \Pi^{-1}(i(\Pi(x, y, z))) &= \Pi^{-1}(i(\frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z})) = \Pi^{-1}((1-z)\frac{1}{x-iy}) = \Pi^{-1}(\frac{(1-z)(x+iy)}{x^2+y^2}) \\ &= \Pi^{-1}(\frac{(1-z)(x+iy)}{1-z^2}) = \Pi^{-1}(\frac{x+iy}{1+z}) = \Pi^{-1}(\frac{x}{1+z} + i\frac{y}{1+z}) = (x, y, -z) \\ &\Rightarrow \text{Spiegelung an x,y-Ebene.} \end{aligned}$$

6.5

Damit $\|\cdot\|$ Norm auf $\mathbb{R}^{m \times n}$ ist, muss gelten:

1) $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0$

2) $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$

3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

1) Sei $\|A\| = 0 \Rightarrow \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1}} \|Ax\|_{\mathbb{R}^m} = 0$

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : 0 \leq \|Ay\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \frac{y}{\|y\|_{\mathbb{R}^n}} = \|A \cdot \frac{y}{\|y\|_{\mathbb{R}^n}}\| \leq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1}} \|Ax\|_{\mathbb{R}^m} = 0$$

$$\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \|Ay\|_{\mathbb{R}^m} = 0 \Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : Ay = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\begin{aligned} 2) \|\lambda A\| &= \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1}} \|\lambda Ax\|_{\mathbb{R}^m} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1}} (|\lambda| \cdot \|Ax\|_{\mathbb{R}^m}) = |\lambda| \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1}} \|Ax\|_{\mathbb{R}^m} \\ &= |\lambda| \cdot \|A\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad \|A + B\| &= \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1}} \|(A + B)x\|_{\mathbb{R}^m} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1}} \|Ax + Bx\|_{\mathbb{R}^m} \\
&\leq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1}} (\|Ax\|_{\mathbb{R}^m} + \|Bx\|_{\mathbb{R}^m}) \leq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1}} \|Ax\|_{\mathbb{R}^m} + \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1}} \|Bx\|_{\mathbb{R}^m} \\
&= \|A\| + \|B\| \\
\|Ax\|_{\mathbb{R}^n} &= \left\| A \frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}} \|x\|_{\mathbb{R}^n} \right\|_{\mathbb{R}^n} = \|x\|_{\mathbb{R}^n} \left\| A \frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}} \right\| \leq \|x\|_{\mathbb{R}^n} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1}} \|Ax\|_{\mathbb{R}^n} = \|A\| \|x\|_{\mathbb{R}^n}
\end{aligned}$$

6.6

Koordinaten von W: $W = (\cos(50^\circ), 0, \sin(50^\circ)) := (a, 0, b)$

Koordinaten von O: $O = (a \cos(78^\circ), a \sin(78^\circ), \sin(50^\circ)) := (ac, ad, b)$

$$a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a^2 (c^2 + d^2) + b^2 = 1$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 1, \quad c^2 + d^2 = 1$$

$$\frac{W+O}{2} = \left(a \frac{1+d}{2}, \frac{ad}{2}, b \right)$$

$$\Rightarrow \text{Breitengrad}_{\max} = \arctan \left(\frac{a}{\sqrt{\left(a \frac{1+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{ad}{2}\right)^2}} \right) \approx 56,89^\circ$$