Höhere Quantenmechanik Aufgabe 4

Julian Bergmann
Dennis Getzkow

5/5

a) Normierung:

$$\langle\phi|\phi\rangle \overset{!}{=} 1 \overset{!}{=} \mathcal{N}^2\langle 0|b_0^n(b_0^+)^n|0\rangle = \mathcal{N}^2\langle 0|b_0^n(b_0^+)^{n-1}|1\rangle\sqrt{1}$$

$$= \mathcal{N}^2\langle 0|b_0^n(b_0^+)^{n-2}|2\rangle\sqrt{1}\sqrt{2} = \mathcal{N}^2\langle 0|b_0^n(b_0^+)^{n-n}|n\rangle\sqrt{n!}$$

$$= \mathcal{N}^2\langle 0|b_0^{n-1}|n-1\rangle\sqrt{n!}\sqrt{n} = \mathcal{N}^2\langle 0|b^{n-2}|n-2\rangle\sqrt{n!}\sqrt{n}\sqrt{n-1}$$

$$= \mathcal{N}^2\langle 0|b_0^{n-n}|n-n\rangle\sqrt{n!}\sqrt{n!} = \mathcal{N}^2\langle 0|0\rangle n!$$

$$\Rightarrow \mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{n!}}$$

b) $[b_\alpha,(b_0^+)^n]_- = b_\alpha(b_0^+)^n - (b_0^+)^n b_\alpha$

Ist $\alpha \neq 0$: $[b_\alpha, b_0^+]_- = 0$

$$\Rightarrow b_\alpha(b_0^+)^n = (b_0^+)^n b_\alpha \quad \Rightarrow [b_\alpha,(b_0^+)^n]_- = b_\alpha(b_0^+)^n - (b_0^+)^n b_\alpha = 0$$

$\Rightarrow \delta_{\alpha 0}$

Ist $\alpha = 0$: $[b_\alpha, b_0^+]_- = 1$

$$\Rightarrow b_\alpha(b_0^+)^n = b_\alpha b_0^+(b_0^+)^{n-1} = (b_0^+)^{n-1} + b_0^+ b_\alpha(b_0^+)^{n-1}$$

$$= (b_0)^{n-1} + b_0^+ b_\alpha b_0^+(b_0^+)^{n-2} = (b_0^+)^{n-1} + b_0^+(b_0^+)^{n-2} + b_0^+ b_0^+ b_\alpha(b_0^+)^{n-2}$$

$$\Rightarrow \ldots = \sum_{i=1}^n (b_0^+)^{n-1} + (b_0^+)^n b_\alpha$$

$$\Rightarrow [b_\alpha, b_0^+]_- = (b_0^+)^n b_\alpha + \sum_{i=1}^n (b_0^+)^{n-1} - (b_0^+)^n b_\alpha = n(b_0^+)^{n-1}$$

$$\langle\phi_0|H|\phi_0\rangle = \langle 0|\frac{1}{\sqrt{n!}} b_0^n\Big(\sum_{\alpha\alpha'} t_{\alpha\alpha'} b_\alpha^+ b_{\alpha'} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\alpha'\beta\beta'}\langle\alpha\beta|v|\alpha'\beta'\rangle b_\alpha^+ b_\beta^+ b_{\alpha'} b_{\beta'}\Big)(b_0^+)^n\frac{1}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

$$\langle 0|\frac{1}{n!}\sum_{\alpha\alpha'} t_{\alpha\alpha'} b_0^n b_\alpha^+ b_{\alpha'}(b_0^+)^n|0\rangle = \langle 0|\frac{n}{n!}\sum_{\alpha\alpha'} t_{\alpha\alpha'} b_0^n b_\alpha^+(b_0^+)^{n-1}\delta_{\alpha' 0}|0\rangle$$

$$= \langle 0|\frac{n}{n!}\sum_\alpha t_{\alpha 0} b_0^n b_\alpha^+(b_0^+)^{n-1}|0\rangle = \langle 0|\frac{n}{n!}\sum_\alpha t_{\alpha 0}\big(\delta_{\alpha 0} b_0^n(b_0^+)^n + (1-\delta_{\alpha 0}) b_\alpha^+ b_0^n(b_0^+)^{n-1}\big)|0\rangle$$

$$= \langle 0|\frac{n}{n!}\sum_\alpha t_{\alpha 0}\big(\delta_{\alpha 0} b_0^n(b_0^+)^n + \underbrace{(1-\delta_{\alpha 0}) b_\alpha^+}_{\Rightarrow = 0}(\delta_{0\alpha}(b_0^+)^{n-2} + (b_0^+)^{n-1}\underbrace{b_0}_{=0})\big)|0\rangle$$

$$= \langle 0|\frac{n}{n!}\sum_\alpha t_{\alpha 0}\delta_{\alpha 0} b_0^n(b_0^+)^n|0\rangle = \langle 0|\frac{n}{n!} t_{00} b_0^n(b_0^+)^n|0\rangle = n t_{00}$$

$$\langle 0|\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\alpha'\beta'}\langle\alpha\beta|v|\alpha'\beta'\rangle b_0^n b_\alpha^+ b_\beta^+ b_{\alpha'} b_{\beta'}(b_0^+)^n|0\rangle$$

$$= \langle 0|\frac{n(n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\langle\alpha\beta|v|00\rangle \underbrace{b_0^n b_\alpha^+ b_\beta^+ (b_0^+)^{n-2}}_{\langle 0|\ldots \neq 0 \text{ wenn } \alpha=\beta=0}|0\rangle$$

$$= \langle 0|\frac{n(n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{2}\langle 00|v|00\rangle b_0^n(b_0^+)^n|0\rangle = \frac{1}{2}n(n-1)\langle 00|v|00\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\phi_0|H|\phi_0\rangle = n t_{00} + \frac{1}{2}n(n-1)\langle 00|v|00\rangle$$

$\Rightarrow$

Zusatzaufgabe:

$$\langle i_1 \dots i_N | a_l^\dagger | j_1 \dots j_M \rangle = \delta_{M+1,N} \, (1-j_l) i_l \, \langle i_1 \dots i_N | j_l j_1 \dots j_M \rangle$$

stimmt Anzahl Teilchen überein — j_l vorher unbesetzt — i_l vorher besetzt — stimmen restliche Zustände

$$= \delta_{M+1,N} (1-j_l) i_l \cdot (-1)^{l-1} \langle i_1 \dots i_N | j_1 \dots j_l \dots j_M \rangle$$

$$= \delta_{M+1,N} (1-j_l) i_l \cdot (-1)^{l-1} \prod_{k=1}^{N} \delta_{i_k j_k}$$

$$\langle n_1 \dots n_{N'} | b_\alpha b_\beta^\dagger | m_1 \dots m_{M'} \rangle = \delta_{M',N'} \Big(\underbrace{\delta_{\alpha\beta} \prod_{k=1}^{N'} \delta_{m_k n_k} (m_\alpha + 1)}_{\alpha=\beta \Rightarrow \text{ Stimmt restl. Zustände überein, ergibt sich nur } \sqrt{m_\alpha+1}^2 \text{ als Faktor}} + \underbrace{(1-\delta_{\alpha\beta})}_{\alpha \neq \beta} \underbrace{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq\alpha \\ k\neq\beta}}^{N'} \delta_{m_k n_k}}_{\text{stimmen restliche Zustände überein}}$$

$$\cdot \underbrace{\delta_{m_\beta+1, n_\beta}}_{\text{stimmen neue } \beta\text{-Zust. überein?}} \cdot \underbrace{\delta_{n_\alpha+1, m_\alpha}}_{\text{stimmen neue } \alpha\text{-Zust. überein?}} \cdot \underbrace{(1-\delta_{m_\alpha,0})}_{\text{ist } m_\alpha \text{ besetzt? sonst } b_\alpha|0\rangle = 0} \cdot \sqrt{m_\beta+1}\sqrt{m_\alpha} \Big)$$

$$\Rightarrow \langle i_1 \dots i_N, n_1 \dots n_{N'} | U | j_1 \dots j_M, m_1 \dots m_{M'} \rangle = \delta_{M+1,N} \cdot (1-j_l) i_l (-1)^{l-1} \prod_{k=1}^{N} \delta_{i_k j_k}$$

$$\cdot \delta_{M',N'} \Big(\delta_{\alpha\beta} \prod_{k=1}^{N'} \delta_{m_k n_k} (m_\alpha+1) + (1-\delta_{\alpha\beta}) \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq\alpha \\ k\neq\beta}}^{N'} \delta_{m_k n_k} \cdot \delta_{m_\beta+1, n_\beta} \cdot \delta_{n_\alpha+1, m_\alpha}$$

$$\cdot (1-\delta_{m_\alpha,0}) \sqrt{m_\beta+1}\sqrt{m_\alpha} \Big)$$

2/2